Ueber gewisse Biegungsregelflächen des einschaligen Hyperboloids

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Hohen naturwissenschaftlichen Fakultät

der

Vereinigten Friedrichs-Universität Halle-Wittenberg

vorgelegt von

Arschak Tonjanz

aus Bananz (Kaukasus).

Halle-Saale
1925

Referent:

Geheimrat Professor Dr. Gutzmer, Halle (Saale) †

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Einleitung.

In der vorliegenden Arbeit, zu der ich Anregung erhielt von meinem hochgeehrten Lehrer, Herrn Geh. Regierungsrat Professor Dr. A. Gutzmer, im Verein mit Herrn Professor Dr. E. Salkowski, beschäftige ich mich mit solchen Biegungsregelflächen des einschaligen Hyperboloids, bei denen eine der durch den Scheitel der kleinen Achse der Kehllellipse gehenden Geraden sich in eine ebene Geodätische verwandelt. Diesem Problem widmet Herr Prof. Dr. E. Salkowski einen Abschnitt in seiner Arbeit „Biegungsregelflächen von Flächen zweiter Ordnung“ [1]), worauf ich mich in Vorliegendem hauptsächlich stütze.

Im ersten Teile entwickle ich die Bedingungen, unter denen die rechtwinkligen Koordinaten der Biegungskurve der obengenannten Geraden durch elementare oder elliptische Funktionen ihres Bogens ausgedrückt werden können. Danach wird die Gestalt der verbogenen Kurve allgemein untersucht, und es werden die allgemeinen Gleichungen der Biegungsregelfläche aufgestellt.

Im zweiten Teile werden die Asymptotenlinien und die Striktionslinie des Hyperboloids in Parameterdarstellung angegeben, um später die Biegungslinien dieser wichtigen Kurven zu bestimmen.

Der dritte Teil knüpft sich an den ersten, indem er die allgemeinen Gleichungen der dort aufgestellten Biegungslinienfläche in einigen speziellen Fällen eingehender untersucht und ihre Eigenschaften näher entwickelt.

---

[1]) Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft. XII. Jahrgang. 3. Stück. Sitzung vom 12. März 1913.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41534918_0378

Inhaltsübersicht.

Seite

Einleitung. 3

§ 1. Allgemeine Darstellung der verbogenen Fläche 7

1. Stellung des Problems 7

2. Aufsuchung der Bedingungen dafür, daß die rechtwinkligen Koordinaten der verbogenen Direktrix $u = o$ durch elementare oder elliptische Funktionen ihres Bogens darstellbar sind 9

3. Allgemeine Untersuchung der verbogenen Direktrix . . . 19

4. Allgemeine Darstellung der verbogenen Fläche 22

§ 2. Kurven auf dem Hyperboloid 23

1. Die Asymptotenlinien in Parameterdarstellung 23

2. Die Striktionslinie in Parameterdarstellung 25

§ 3. Spezielle Fälle der Biegungsregelfläche 27

1. $A = 1$

a) Integration der Gleichungen der verbogenen Direktrix $u = o$ 27

b) Parameterdarstellung der verbogenen Fläche 30

c) Untersuchung der Schnitte $z_1 =$ konst. der Fläche 31

d) Biegungskurven der zweiten Schar von Geraden des Hyperboloids 47

e) Bestimmung der Lage einiger Geraden auf der Biegungsfläche 51

2. $A = 2$.

a) Integration der Gleichungen der verbogenen Direktrix $u = o$ 54

b) Parameterdarstellung der verbogenen Fläche 57

c) Die Lage der Geraden $v = \pm\infty$ auf der Biegungsfläche . 58

3. $A = 3$.

a) Integration der Gleichungen der verbogenen Direktrix $u = o$ 60

b) Parameterdarstellung der verbogenen Fläche 64

Über gewisse Biegungsregelflächen des einschaligen Hyperboloids.

§ 1. Allgemeine Darstellung der verbogenen Fläche.

1. Stellung des Problems.

Das Hyperboloid

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a,\ b,\ c \text{ reell})$$

sei in Parameterdarstellung durch die Gleichungen

$$(2) \qquad \begin{cases} x=a\,[v+u\,(v^2-1)] \\ y=b\,(1+2\,uv) \\ z=c\,[v+u\,(v^2+1)] \end{cases}$$

gegeben. Hier sind die Parameterkurven $v=$konst. die eine Schar der Erzeugenden der Fläche, weil x, y, z in u linear sind. Die xz-Projektion jeder Kurve der Schar $u=$konst. ist eine Gerade $\frac{z}{c}-\frac{x}{a}=2u$, während ihre xy-Projektion eine Parabel: $y^2=\frac{4b^2}{a}ux+b^2(4u^2+1)$ ist. Die Kurven $u=$konst. sind infolgedessen parabolische Schnitte des Hyperboloids (2); sie liegen in Ebenen, die parallel der y-Achse und der Asymptote $\frac{z}{c}-\frac{x}{a}=0$ des Schnittes der Fläche mit der zx-Ebene sind.

Insbesondere ist die Kurve $u=0$ die Gerade $x=av$, $y=b$, $z=cv$, oder, was dasselbe ist: $x=\frac{a}{c}z$, $y=b$. Sie liegt in der zur xz-Ebene durch den Scheitel der kleinen Achse der Kehllellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ parallel laufenden Ebene,

geht durch diesen Scheitel und hat als xz-Projektion die obengenannte Asymptote $\frac{z}{c} - \frac{x}{a} = o$.

Biegt man nun die Fläche (2) so, daß die eine Schar der Erzeugenden $v = \text{konst.}$ geradlinig bleibt, so geht die Gerade $u = o$ in eine Raumkurve (x, y, z) über.

Die Gleichungen dieser Biegungsfläche können daher in die Form

$$(3) \qquad \begin{cases} x_1 = x + u(p\alpha + q\lambda) \\ y_1 = y + u(p\beta + q\mu) \\ z_1 = z + u(p\gamma + q\nu) \end{cases}$$

gebracht werden, wenn (α, β, γ) die Richtungskosinus der Tangenten, (λ, μ, ν) die der Binormalen sind, und p und q zwei noch zu bestimmende Funktionen von v bedeuten.

Die Koeffizienten der ersten Fundamentalform

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

nehmen für das Hyperboloid (2) die Werte an:

$$(4) \qquad \begin{cases} E = a^2(v^2-1)^2 + 4b^2v^2 + c^2(v^2+1)^2 \\ F = [a^2(v^2-1) + c^2(v^2+1)](1 + 2uv) + 4b^2uv \\ G = (a^2 + c^2)(1 + 2uv)^2 + 4b^2u^2 \end{cases}$$

Für die verbogene Fläche (3) dagegen haben sie die Werte:

$$(5) \qquad \begin{cases} \overline{E} = p^2 + q^2 \\ \overline{F} = ps' + u(pp' + qq') \\ \overline{G} = s'^2 + 2u\,p's' + u^2[p'^2 + q'^2 + s'^2(p\varkappa + q\tau)^2] \end{cases}$$

wobei s, $\varkappa$, τ Bogenlänge, Krümmung und Torsion der Kurve $u = o$, der Akzent die Differentiation nach v bedeutet.

Nun müssen aber die Fundamentalgrößen (4) und (5) der beiden Flächen identisch übereinstimmen, es muß also sein:

$$E = \overline{E},\ F = \overline{F},\ G = \overline{G}.$$

Daraus ergibt sich:

(6) $s' = \sqrt{a^2 + c^2}$, folglich $s = \sqrt{a^2 + c^2}\ v$, wenn wir annehmen, daß s mit v gleichzeitig verschwindet.

$$(7) \qquad p = \frac{s^2 - (a^2 - c^2)}{\sqrt{a^2 + c^2}}, \quad p' = 2s$$

$$(8) \qquad q = 2\sqrt{\frac{b^2 s^2 + a^2 c^2}{a^2 + c^2}}, \quad q' = \frac{2 b^2 s}{\sqrt{b^2 s^2 + a^2 c^2}}$$

$$[s^2 - (a^2 - c^2)]\,\varkappa + 2\tau\sqrt{b^2 s^2 + a^2 c^2} = \frac{2 a b c}{\sqrt{b^2 s^2 + a^2 c^2}}.$$

Diese letzte Gleichung stellt sämtliche Kurven dar, die auf den Biegungsflächen dem Parameterwert $u = o$ entsprechen.

Wir werden unsere Betrachtungen auf den Fall beschränken, wo die Biegungskurve $u = o$ eben ist, d. h. $\tau = o$.

Ihre natürliche Gleichung lautet dann:

$$(9) \qquad \frac{1}{\varkappa} = \varrho = [s^2 - (a^2 - c^2)]\,\frac{\sqrt{b^2 s^2 + a^2 c^2}}{2 a b c}.$$

Aus dieser Gleichung gewinnt man den Krümmungswinkel ω:

$$(10) \qquad \omega = \int \varkappa\, d s = 2 a b c \int \frac{d s}{[s^2 - (a^2 - c^2)]\sqrt{b^2 s^2 + a^2 c^2}}$$

2. Aufsuchung der Bedingungen dafür, dass die rechtwinkligen Koordinaten der verbogenen Direktrix durch elementare und elliptische Integrale des Bogens darstellbar sind.

Die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes der Biegungskurve $u = o$

$$(11) \qquad \begin{cases} x = \int \cos\omega\, d s \\ y = \int \sin\omega\, d s \\ z = o \end{cases}$$

lassen sich nur für gewisse Achsenverhältnisse $a : b : c$, wie die späteren Untersuchungen zeigen, durch elementare und elliptische Funktionen ausdrücken, und wir werden uns nur mit diesen Fällen zu beschäftigen haben.

Zur Integration der Gleichung (10) machen wir den Ansatz:

(12) $s = \frac{ac}{b} \operatorname{tg} t$, also $\sin t = \frac{bs}{\sqrt{b^2 s^2 + a^2 c^2}}$,

dann geht (10) über in die Gleichung:

(13) $$\omega = \frac{2b^2}{ac} \int \frac{d \sin t}{\left[1 + \frac{(a^2 - c^2) b^2}{a^2 c^2}\right] \sin^2 t - \frac{(a^2 - c^2) b^2}{a^2 c^2}},$$

die nach Einführung der Bezeichnung $\frac{a^2 - c^2}{a^2 c^2} b^2 = \lambda$ in der Form

(13′) $$\omega = \frac{2b^2}{ac} \int \frac{d \sin t}{(1 + \lambda) \sin^2 t - \lambda}$$

geschrieben werden kann.

Hierbei sind folgende Fälle zu unterscheiden:

I. $1 + \lambda > 0$.

1) $\lambda = \lambda_1^2$, also $a > c$.

$$\omega = \frac{2b^2}{ac} \frac{1}{2\lambda_1 \sqrt{1 + \lambda_1^2}} \ln \left[\frac{\sin t - \frac{\lambda_1}{\sqrt{1 + \lambda_1^2}}}{\sin t + \frac{\lambda_1}{\sqrt{1 + \lambda_1^2}}} \right] + \gamma_1,$$

oder wegen (12):

(13a) $$\omega = \frac{b^2}{ac \lambda_1 \sqrt{1 + \lambda_1^2}} \ln \left[\frac{\frac{bs}{\sqrt{b^2 s^2 + a^2 c^2}} - \frac{\lambda_1}{\sqrt{1 + \lambda_1^2}}}{\frac{bs}{\sqrt{b^2 s^2 + a^2 c^2}} + \frac{\lambda_1}{\sqrt{1 + \lambda_1^2}}} \right] + \gamma_1.$$

2) $\lambda = 0$, also $a = c$.

(13b) $$\omega = -\frac{2b^2}{ac} \cdot \frac{1}{\sin t} + \gamma_2 = -\frac{2b^2}{ac} \cdot \frac{\sqrt{b^2 s^2 + a^2 c^2}}{bs} + \gamma_2.$$

3) $\lambda = -\lambda_1^2$, also $a < c$.

In diesem Falle ist die Integration nach t, bzw. nach s, von o an gestattet, weil der Integrand in (13′), resp. in (13), stets endlich bleibt. Treffen wir die Verfügung, daß ω mit s gleichzeitig verschwindet, so können wir schreiben:

(13c) $$\omega = \frac{2b^2}{ac} \frac{1}{\lambda_1 \sqrt{1 - \lambda_1^2}} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{\sqrt{1 - \lambda_1^2}}{\lambda_1} \sin t \right)$$

$$= \frac{2b^2}{ac} \cdot \frac{1}{\lambda_1 \sqrt{1-\lambda_1^2}} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{1-\lambda_1^2}}{\lambda_1} \frac{bs}{\sqrt{b^2 s^2 + a^2 c^2}}\right).$$

II. $1+\lambda = 0$; die Integration ist von o an gestattet. Unter der Voraussetzung, daß ω mit t gleichzeitig verschwindet, bekommt man:

$$(13d) \qquad \omega = \frac{2b^2}{ac} \sin t = \frac{2b^3 s}{ac\sqrt{b^2 s^2 + a^2 c^2}}.$$

III. $1+\lambda < 0$, also $\lambda = -\lambda_1^2$ und $\lambda_1^2 - 1 > 0$.

$$(13e) \qquad \omega = \frac{b^2}{ac} \frac{1}{\lambda_1 \sqrt{\lambda_1^2 - 1}} \ln \left[\frac{\sin t + \frac{\lambda_1}{\sqrt{1-\lambda_1^2}}}{\sin t - \frac{\lambda_1}{\sqrt{1-\lambda_1^2}}} \right] + \gamma_3$$

$$= \frac{b^2}{ac} \cdot \frac{1}{\lambda_1 \sqrt{\lambda_1^2 - 1}} \ln \left[\frac{\frac{bs}{\sqrt{b^2 s^2 + a^2 c^2}} + \frac{\lambda_1}{\sqrt{1-\lambda_1^2}}}{\frac{bs}{\sqrt{b^2 s^2 + a^2 c^2}} - \frac{\lambda_1}{\sqrt{1-\lambda_1^2}}} \right] + \gamma_3$$

Mit γ_1, γ_2 und γ_3 sind in (13a), (13b) und (13e) die Integrationskonstanten bezeichnet.

Setzen wir die Ausdrücke für ω aus den Gl-en (13a) bis (13e) in die Gl-en (11) ein, so sind die vorkommenden Integranden von der Form: cos [c, ln φ(s)], sin [c, ln φ(s)], cos ψ(s), sin ψ(s), cos [A arc tg f(s)], sin [A arc tg f(s)], wobei c_1 und A konstante Größen sind, während φ(s), ψ(s) und f(s) gewisse gebrochene irrationale Funktionen von s bezeichnen. Die ersten vier Funktionen lassen weder elementare noch elliptische Integrationen zu, dagegen sind die beiden letzten Funktionen in besonderen Fällen teils elementar, teils elliptisch integrierbar. Dieser letzte Umstand hat darin seinen Grund, daß die Beziehungen bestehen:

$$(14) \quad \begin{cases} \cos \operatorname{arc\,tg} f(s) = \cos \operatorname{arc\,cos} \dfrac{1}{\sqrt{1+f(s)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+f(s)^2}} \\ \sin \operatorname{arc\,tg} f(s) = \sin \operatorname{arc\,sin} \dfrac{f(s)}{\sqrt{1+f(s)^2}} = \dfrac{f(s)}{\sqrt{1+f(s)^2}}, \end{cases}$$

und außerdem die Funktionen cos [A arc tg f(s)] und sin [A arc tg f(s)] für spezielle noch zu bestimmende Werte von A sich durch cos arc tg f(s) und sin arc tg f(s) rational oder quadratisch irrational ausdrücken lassen.

Unserer Voraussetzung gemäß haben wir uns mit dem durch die Gl-en (13c) und (11) bestimmten Fall zu beschäftigen.

Wir führen die Bezeichnungen ein:

$$(15)\quad \begin{cases} A = \dfrac{2b^2}{ac} \cdot \dfrac{1}{\lambda_1 \sqrt{1-\lambda_1^2}} = \dfrac{2abc}{\sqrt{c^2-a^2}\,\sqrt{a^2c^2-(c^2-a^2)b^2}} \\ B = \dfrac{b\sqrt{1-\lambda_1^2}}{\lambda_1} = \dfrac{\sqrt{a^2c^2-(c^2-a^2)b^2}}{\sqrt{c^2-a^2}} = \dfrac{2abc}{(c^2-a^2)A} \end{cases}$$

Mit Rücksicht auf das Spätere bilden wir:

$$(16)\quad \begin{cases} b = \dfrac{Aac\sqrt{c^2-a^2}}{\sqrt{4a^2c^2+A^2(c^2-a^2)^2}} \\ B = \dfrac{2a^2c^2}{\sqrt{c^2-a^2}\sqrt{4a^2c^2+A^2(c^2-a^2)^2}} \\ k = \dfrac{B}{\sqrt{B^2+b^2}} = \dfrac{2ac}{\sqrt{4a^2c^2+A^2(c^2-a^2)^2}}, \\ k' = \dfrac{A(c^2-a^2)}{\sqrt{4a^2c^2+A^2(c^2-a^2)^2}}, \text{ wobei } k^2+k'^2=1 \text{ ist.} \\ b = \dfrac{A}{2}k\sqrt{c^2-a^2},\ B = \dfrac{ack}{\sqrt{c^2-a^2}},\ \dfrac{B}{b} = \dfrac{k}{k'}. \end{cases}$$

Setzen wir den Wert von ω aus (13c) in (11) ein, so bekommen wir unter Berücksichtigung der Gl-en (15) als Gleichungen der verbogenen Direktrix $u = o$ folgende:

$$(17)\quad \begin{cases} x = \displaystyle\int_o^s \cos\left(A \operatorname{arc\,tg} \frac{Bs}{\sqrt{b^2s^2+a^2c^2}}\right) ds \\ y = \displaystyle\int_o^s \sin\left(A \operatorname{arc\,tg} \frac{Bs}{\sqrt{b^2s^2+a^2c^2}}\right) ds \\ z = o \end{cases}$$

Die Integrationskonstanten sind hier durch die Festsetzung vermieden, daß x und y mit s gleichzeitig verschwinden sollen.

I. Ist A eine ganze Zahl, so können wir in (17) Kosinus und Sinus des vielfachen Arguments $A \operatorname{arc\,tg} \frac{Bs}{\sqrt{b^2 s^2 + a^2 c^2}}$ durch Kosinus und Sinus des einfachen Arguments $\operatorname{arc\,tg} \frac{Bs}{\sqrt{b^2 s^2 + a^2 c^2}}$ rational ausdrücken. Wir wollen hierbei zwei Fälle unterscheiden:

1. A ist gerade: $A = 2m$.

Unter Berücksichtigung der Gl-en (14) bekommen wir:

$$\cos\left(2m \operatorname{arc\,tg} \frac{Bs}{\sqrt{b^2 s^2 + a^2 c^2}}\right) = \sum_{p=o}^{m} (-1)^p \binom{2m}{2p}$$

$$\cos^{2m-2p}\left(\operatorname{arc\,tg} \frac{Bs}{\sqrt{b^2 s^2 + a^2 c^2}}\right) \cdot \sin^{2p}\left(\operatorname{arc\,tg} \frac{Bs}{\sqrt{b^2 s^2 + a^2 c^2}}\right)$$

$$= \sum_{p=o}^{m} (-1)^p \binom{2m}{2p} \frac{(b^2 s^2 + a^2 c^2)^{m-p} (Bs)^{2p}}{[(B^2 + b^2) s^2 + a^2 c^2]^m},$$

$$\sin\left(2m \operatorname{arc\,tg} \frac{Bs}{\sqrt{b^2 s^2 + a^2 c^2}}\right) = \sum_{p=o}^{m-1} (-1)^p \binom{2m}{2p+1}$$

$$\cos^{2m-2p-1}\left(\operatorname{arc\,tg} \frac{Bs}{\sqrt{b^2 s^2 + a^2 c^2}}\right) \cdot \sin^{2p+1}\left(\operatorname{arc\,tg} \frac{Bs}{\sqrt{b^2 s^2 + a^2 c^2}}\right)$$

$$= \sum_{p=o}^{m-1} (-1)^p \binom{2m}{2p+1} \frac{(b^2 s^2 + a^2 c^2)^{m-p} (Bs)^{2p+1}}{[(B^2 + b^2) s^2 + a^2 c^2]^m} \cdot \frac{1}{\sqrt{b^2 s^2 + a^2 c^2}}.$$

Diese Ausdrücke setzen wir in (17) ein. x hat dann die Form:

$$C. \int_0^s \Phi(s^2)\, ds,$$

während y lautet:

$$C_1 \cdot \int_0^s \Phi(s) \cdot \frac{ds}{\sqrt{b^2 s^2 + a^2 c^2}}$$

Φ ist dabei das Zeichen einer rational gebrochenen Funktion, C und C_1 sind Konstanten.

Resultat: Ist A gerade, so sind die rechtwinkligen Koordinaten der verbogenen Direktrix $u = o$ elementare Funktionen ihres Bogens s.

2. A ist ungerade: $A = 2m + 1$.

$$\cos\left[(2m+1)\operatorname{arc\,tg}\frac{Bs}{\sqrt{b^2 s^2 + a^2 c^2}}\right] = \sum_{p=o}^{m} (-1)^p \binom{2m+1}{2p}$$

$$\cos^{2m+1-2p}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{Bs}{\sqrt{b^2 s^2 + a^2 c^2}}\right) \sin^{2p}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{Bs}{\sqrt{b^2 s^2 + a^2 c^2}}\right)$$

$$= \sum_{p=o}^{m} (-1)^p \binom{2m+1}{2p} \frac{(b^2 s^2 + a^2 c^2)^{m+1-p} (Bs)^{2p}}{[(B^2 + b^2) s^2 + a^2 c^2]^m}$$

$$\frac{1}{\sqrt{b^2 s^2 + a^2 c^2} \cdot \sqrt{(B^2 + b^2) s^2 + a^2 c^2}}.$$

$$\sin\left[(2m+1)\operatorname{arc\,tg}\frac{Bs}{\sqrt{b^2 s^2 + a^2 c^2}}\right] = \sum_{p=o}^{m} (-1)^p \binom{2m+1}{2p+1}$$

$$\cos^{2m-2p}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{Bs}{\sqrt{b^2 s^2 + a^2 c^2}}\right) \sin^{2p+1}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{Bs}{\sqrt{b^2 s^2 + a^2 c^2}}\right)$$

$$= \sum_{p=o}^{m} (-1)^p \binom{2m+1}{2p+1} \frac{(b^2 s^2 + a^2 c^2)^{m-p} \cdot (Bs)^{2p+1}}{[(b^2 + B^2) s^2 + a^2 c^2]^m} \cdot$$

$$\frac{1}{\sqrt{(B^2 + b^2) s^2 + a^2 c^2}}$$

Setzen wir diese Ausdrücke in (17) ein, so ist x von der Form:

$$C_2 \int_0^s \Phi(s^2) \frac{ds}{\sqrt{(b^2 + B^2) s^2 + a^2 c^2} \cdot \sqrt{b^2 s^2 + a^2 c^2}}$$

und für y ergibt sich

$$C_3 \int_0^s \Phi(s) \frac{ds}{\sqrt{(B^2 + b^2) s^2 + a^2 c^2}}.$$

Resultat: Ist A eine ungerade Zahl, so drückt sich die Abszisse x der verbogenen Direktrix $u = o$ durch elliptische Funktionen ihres Bogens s aus, während die Ordinate y eine elementare Funktion von s bleibt.

II. Ist A keine ganze Zahl, so ist eine rationale Darstellung von Kosinus und Sinus des Arguments $A \operatorname{arc\,tg} \frac{Bs}{\sqrt{b^2 s^2 + a^2 c^2}}$ durch die des einfachen Arguments $\operatorname{arc\,tg} \frac{Bs}{\sqrt{b^2 s^2 + a^2 c^2}}$ nicht möglich.

Es ist nach (14):

$$(14') \quad \begin{cases} \cos \operatorname{arc\,tg} \frac{Bs}{\sqrt{b^2 s^2 + a^2 c^2}} = \frac{\sqrt{b^2 s^2 + a^2 c^2}}{\sqrt{(b^2 + B^2) s^2 + a^2 c^2}} \\ \sin \operatorname{arc\,tg} \frac{Bs}{\sqrt{b^2 s^2 + a^2 c^2}} = \frac{Bs}{\sqrt{(B^2 + b^2) s^2 + a^2 c^2}} \end{cases}$$

Zunächst wählen wir $A = \frac{2m+1}{2}$, wo m eine ganze Zahl ist.

Es gilt allgemein:

$$(18) \quad \cos \frac{2m+1}{2} \varphi = \sqrt{\frac{1 + \cos(2m+1)\varphi}{2}},$$

$$\sin \frac{2m+1}{2} \varphi = \sqrt{\frac{1 - \cos(2m+1)\varphi}{2}}$$

Ist nun φ_1 ein Wert, der $\cos \frac{2m+1}{2} \varphi$ (oder $\sin \frac{2m+1}{2} \varphi$) zu Null macht, so gilt dasselbe von $(-\varphi_1)$. $\cos\varphi_1$ ist somit eine Doppelwurzel der Gleichung $1 + \cos(2m+1)\varphi = o$ [oder $1 - \cos(2m+1)\varphi = o$].

Nun verschwindet $\cos\frac{2m+1}{2}\varphi$ für folgende Werte von φ:

$$\varphi_{1,2} = \pm\frac{\pi}{2m+1},\ \varphi_{3,4} = \pm\frac{3\pi}{2m+1},\cdots$$

$$\varphi_{2m-1,2m} = \pm\frac{(2m-1)\pi}{2m+1},\ \varphi_{2m+1} = \pi$$

Folglich kann man die Funktion $1+\cos(2m+1)\varphi$, wenn man sie durch $\cos\varphi$ und seine höheren Potenzen darstellt, folgendermaßen zerlegen:

$$(19^a)\quad 1+\cos(2m+1)\varphi = c_1\left(\cos\varphi-\cos\frac{\pi}{2m+1}\right)^2$$
$$\left(\cos\varphi-\cos\frac{3\pi}{2m+1}\right)^2\cdots\left(\cos\varphi-\cos\frac{2m-1}{2m+1}\pi\right)^2\left(\cos\varphi-\cos\pi\right).$$

Ebenso findet man die Nullstellen der Funktion $\sin\frac{2m+1}{2}\varphi$ für folgende Werte von φ:

$$\varphi_1 = 0,\ \varphi_{2,3} = \pm\frac{2\pi}{2m+1},\ \varphi_{4,5} = \pm\frac{4\pi}{2m+1},\cdots$$

$$\varphi_{2m,\,2m+1} = \pm\frac{2m\pi}{2m+1},$$

und die Funktion $1-\cos(2m+1)\varphi$ zerlegt sich folgendermaßen:

$$(19^b)\qquad 1-\cos(2m+1)\varphi = c_1(\cos 0-\cos\varphi)$$
$$\left(\cos\varphi-\cos\frac{2\pi}{2m+1}\right)^2\left(\cos\varphi-\cos\frac{4\pi}{2m+1}\right)^2\cdots$$
$$\left(\cos\varphi-\cos\frac{2m\pi}{2m+1}\right)^2$$

Aus (18), (19^a) und (19^b) ergibt sich nun:

$$(18')\quad\begin{cases}\cos\frac{2m+1}{2}\varphi = \frac{\sqrt{c_1}}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\cos\varphi}\left(\cos\varphi-\cos\frac{\pi}{2m+1}\right)\\ \left(\cos\varphi-\cos\frac{3\pi}{2m+1}\right)\cdots\left(\cos\varphi-\cos\frac{2m-1}{2m+1}\pi\right)\end{cases}$$

$$(18') \quad \begin{cases} \sin\dfrac{2m+1}{2}\varphi = \dfrac{\sqrt{c_1}}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\cos\varphi}\left(\cos\varphi - \cos\dfrac{2\pi}{2m+1}\right) \\ \left(\cos\varphi - \cos\dfrac{4\pi}{2m+1}\right)\ldots\left(\cos\varphi - \cos\dfrac{2m\,\pi}{2m+1}\right) \end{cases}$$

Die Gl-en (17) können jetzt geschrieben werden:

$$(17') \quad \begin{cases} x = \displaystyle\int_0^s \cos\left(\frac{2m+1}{2}\arccos\frac{\sqrt{b^2s^2+a^2c^2}}{\sqrt{(B^2+b^2)s^2+a^2c^2}}\right)ds \\ y = \displaystyle\int_0^s \sin\left(\frac{2m+1}{2}\arccos\frac{\sqrt{b^2s^2+a^2c^2}}{\sqrt{(B^2+b^2)s^2+a^2c^2}}\right)ds \\ z = o \end{cases}$$

Setzen wir in (17')

$$\arccos\frac{\sqrt{b^2s^2+a^2c^2}}{\sqrt{(B^2+b^2)s^2+a^2c^2}} = \varphi = \arccos\xi,$$

$$ds = -\frac{a\,c\,B^2\,\xi\,d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}\left(\sqrt{(B^2+b^2)\xi^2-b^2}\right)^3}$$

wenden wir auf (17') die Formeln (18') an und bedienen wir uns der Bezeichnungen (16), so erhalten wir:

$$(20) \quad \begin{cases} x = -\dfrac{k^2\sqrt{c^2-a^2}\cdot\sqrt{c_1}}{\sqrt{2}}\displaystyle\int_1^\xi \frac{(\xi-\xi_1)(\xi-\xi_3)\ldots(\xi-\xi_{2m-1})\,\xi\,d\xi}{\sqrt{1-\xi}\,\sqrt{\xi^2-k'^2}\,(\xi^2-k'^2)} \\ \qquad = -\dfrac{k^2\sqrt{c^2-a^2}\,\sqrt{c_1}}{\sqrt{2}}\displaystyle\int_1^\xi \frac{R(\xi)\,d\xi}{\sqrt{(1-\xi)(\xi^2-k'^2)}} \\ y = -\dfrac{k^2\sqrt{c^2-a^2}\,\sqrt{c_1}}{\sqrt{2}}\displaystyle\int_1^\xi \frac{(\xi-\xi_2)(\xi-\xi_4)\ldots(\xi-\xi_{2m})\,\xi\,d\xi}{\sqrt{1+\xi}\,\sqrt{\xi^2-k'^2}\,(\xi^2-k'^2)} \\ \qquad = -\dfrac{k^2\sqrt{c^2-a^2}\,\sqrt{c_1}}{\sqrt{2}}\displaystyle\int_1^\xi \frac{R_1(\xi)\,d\xi}{\sqrt{(1+\xi)(\xi^2-k'^2)}} \\ z = o, \end{cases}$$

wobei $\xi_\lambda = \cos \frac{\lambda \pi}{2m+1}$ angenommen ist, und R (ξ) und R_1 (ξ) gebrochene rationale Funktionen bezeichnen.

Resultat: Ist A eine Zahl von der Form $A = \frac{2m+1}{2}$ ($m = 0, 1, 2, \ldots$), so drücken sich die rechtwinkligen Koordinaten der verbogenen Direktrix $u = o$ durch elliptische Funktionen des Bogens aus.

Das obige Verfahren zeigt, daß die Möglichkeit der elliptischen Darstellung (20) wesentlich dadurch bedingt ist, daß in (18) erstens die Irrationalität quadratisch ist, und zweitens unter der Wurzel eine ganze rationale Funktion $(2m+1)$. Grades von $\cos\varphi$ steht, die m Doppelwurzeln besitzt. Wäre entweder die erste oder die zweite Bedingung, oder alle beide Bedingungen zusammen, nicht erfüllt, indem entweder höhere Irrationalitäten, oder nicht rationale Funktionen von $\cos\varphi$, oder alles beides gleichzeitig vorkämen, so würden in (20) R (ξ) und R_1 (ξ) höhere als quadratische Irrationalitäten in ξ darstellen, womit eine elliptische Darstellung von x und y unmöglich wäre.

Gesamtergebnis:

Die rechtwinkligen Koordinaten

$$(21)\quad \begin{cases} x = \int_0^s \cos\left[A \operatorname{arc\,tg} \frac{Bs}{\sqrt{b^2 s^2 + a^2 c^2}}\right] ds \\ y = \int_0^s \sin\left[A \operatorname{arc\,tg} \frac{Bs}{\sqrt{b^2 s^2 + a^2 c^2}}\right] ds \\ z = o \end{cases}$$

der verbogenen Direktrix $u = o$ sind nur dann elementare oder elliptische Funktionen des Bogens, wenn A eine ganze Zahl ist oder die Form $A = \frac{2m+1}{2}$ ($m = 0, 1, 2, \ldots$) hat. Dabei sind A und B durch (15) bestimmt.

3. Allgemeine Untersuchung der Direktrix (21).

Durch den Ansatz

$$\text{(22)} \qquad \operatorname{arc\,tg}\frac{Bs}{\sqrt{b^2 s^2 + a^2 c^2}} = \varphi,$$

$$ds = \frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{k} \cdot \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi \sqrt{1 - \frac{k'^2}{k^2}\operatorname{tg}^2\varphi}^3}$$

und unter Berücksichtigung der Gl-en (16) gehen die Gl-en (21) in folgende über:

$$\text{(23)} \quad \begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{c^2 - a^2}}{k} \displaystyle\int_0^{\varphi} \cos(A\varphi) \cdot \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi \sqrt{1 - \frac{k'^2}{k^2}\operatorname{tg}^2\varphi}^3} \\ y = \dfrac{\sqrt{c^2 - a^2}}{k} \displaystyle\int_0^{\varphi} \sin(A\varphi) \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi \sqrt{1 - \frac{k'^2}{k^2}\operatorname{tg}^2\varphi}^3} \\ z = 0, \end{cases}$$

s kann dabei als Bogen der Biegungskurve einer Geraden von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen, daher gilt für φ das Intervall:

$$-\operatorname{arc\,tg}\frac{B}{b} \leqq \varphi \leqq \operatorname{arc\,tg}\frac{B}{b},$$

oder wegen (16):

$$\text{(24)} \qquad -\frac{\pi}{2} < -\operatorname{arc\,tg}\frac{k}{k'} \leqq \varphi \leqq \operatorname{arc\,tg}\frac{k}{k'} < \frac{\pi}{2}.$$

Für die Gestalt der Kurve sind neben den Gl-en (23) folgende Ableitungen derselben maßgebend:

$$\text{(23')} \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{d\varphi} = \dfrac{\sqrt{c^2 - a^2}}{k} \cdot \dfrac{\cos A\varphi}{\cos^2\varphi \sqrt{1 - \frac{k'^2}{k^2}\operatorname{tg}^2\varphi}^3}, \\ \dfrac{dy}{d\varphi} = \dfrac{\sqrt{c^2 - a^2}}{k} \cdot \dfrac{\sin A\varphi}{\cos^2\varphi \sqrt{1 - \frac{k'^2}{k^2}\operatorname{tg}^2\varphi}^3} \end{cases}$$

$$(23') \quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \operatorname{tg} A\varphi \,, \left(\dfrac{dx}{dy} = \operatorname{cotg} A\varphi\right) \\ \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{Ak}{\sqrt{c^2 - a^2}} \cdot \dfrac{\cos^2\varphi \sqrt{1 - \dfrac{k'^2}{k^2}\operatorname{tg}^2\varphi}^{\,3}}{\cos^3 A\varphi}, \\ \left(\dfrac{d^2x}{dy^2} = -\dfrac{Ak}{\sqrt{c^2 - a^2}} \cdot \dfrac{\cos^2\varphi \sqrt{1 - \dfrac{k'^2}{k^2}\operatorname{tg}^2\varphi}^{\,3}}{\sin^3 A\varphi}\right) \end{cases}$$

Es genügt, wenn wir den dem Bereich

$$(24') \qquad 0 \leqq \varphi \leqq \operatorname{arc\,tg} \frac{k}{k'} < \frac{\pi}{2}$$

entsprechenden Kurvenzweig betrachten, weil der andere zu dem ersten Zweig inbezug auf die y-Achse symmetrisch liegt; es gelten nämlich die Beziehungen:

$$(x)_{-\varphi} = -(x)_{\varphi} \text{ und } (y)_{-\varphi} = (y)_{\varphi},$$

wie (23) lehrt.

Die Kurventangente läuft einer der beiden Achsen parallel, sobald

$$(25) \qquad \operatorname{tg} A\varphi = 0 \text{ oder } \operatorname{tg} A\varphi = \infty, \text{ also } A\varphi_{\lambda} = \lambda \cdot \frac{\pi}{2}$$

wird, wobei λ eine positive ganze Zahl ist. Sie liegt im Intervall

$$(26) \qquad 0 \leqq \lambda < A \text{ oder } 0 \leqq \lambda \leqq [A],$$

je nachdem A ganz oder gebrochen ist. [A] bezeichnet hier die größte in A enthaltene ganze Zahl.

Die Intervalle für λ sind aber von $\varphi_{\max.} = \bar{\varphi}_{\lambda}$ auch abhängig. Wir können in (24') $\varphi_{\max.} = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{k}{k'}$ so wählen, daß λ nur einen Wert annimmt, wie groß auch A sein mag. Wir können $\bar{\varphi}_{\lambda}$ stets so bestimmen, daß λ sämtliche ganzzahligen Werte von 0 bis zu irgend einer ganzen Zahl $p < A$ annimmt.

Ist A eine ganze Zahl, so sind die Extremstellen der Koordinaten nach (25) und (26):

$$A\varphi_0,\ A\varphi_1,\ \ldots\ A\varphi_{A-1}$$

Ist A keine ganze Zahl, so sind sie:

$$A\varphi_0,\ A\varphi_1,\ \ldots\ A\varphi_{[A]}$$

Dies sind aber die in höchster Anzahl vorkommenden Extremstellen. Durch passende Wahl von $\bar{\varphi}_\lambda$ können wir immer erreichen, daß nur die Extremstellen

$$A\varphi_0,\ A\varphi_1,\ \ldots\ A\varphi_p$$

vorkommen, wo p von o bis A — 1, resp. bis [A], durchlaufen kann.

Aus (23′) und (25) kann man folgern:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\varphi_{4n}} = o,\ \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{\varphi_{4n}} > o;\ \left(\frac{dx}{dy}\right)_{\varphi_{4n+1}} = o,\ \left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)_{\varphi_{4n+1}} < o$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\varphi_{4n+2}} = o,\ \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{\varphi_{4n+2}} < o;$$

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)_{\varphi_{4n+3}} = o,\ \left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)_{\varphi_{4n+3}} > o.$$

Ist nun $\bar{\lambda}$ der maximale Wert von λ, so können wir folgendes feststellen:

Die Annahme $\bar{\lambda} = o$ gibt für jedes A: $\varphi_o = o$, wie aus (25) ersichtlich ist.

Wächst φ von $\varphi_o = o$ bis $\bar{\varphi} = \varphi_{max.}$, so nimmt x von $x_o = o$ bis $\bar{x} = \infty$ zu, y wächst von $y_o = o$ bis $\bar{y} = \infty$. Der Kurvenzweig hat überall positive Krümmung. In dem durch $\varphi = \bar{\varphi}$ definierten Punkte hat die Kurve eine Asymptote. Die Annahme $\bar{\lambda} = 1$ verlangt, daß $A > 1$ sei. Von den Größen φ_λ kommen hier $\varphi_o = o$ und φ_1 in Betracht.

x nimmt zu mit wachsendem φ im Intervalle $o \leqq \varphi \leqq \varphi_1$ von $x_o = o$ bis $x_{max.} = x_1$. Wächst φ weiter bis $\varphi = \bar{\varphi}$, so nimmt x bis zu dem Werte $\bar{x} = -\infty$ ab. y wächst mit

zunehmendem φ von $y_{min.} = o$ bis $\overline{y} = +\infty$. Die Kurve ist im Intervalle $o \leqq \varphi \leqq \varphi_1$ positiv und nachher stets negativ gekrümmt. $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\overline{\varphi}}$ gibt die Asymptotenrichtung an.

Die Annahme $\overline{\lambda} = p$ verlangt, daß $A > p$ sei. Von den Größen φ_λ kommen hier in Betracht:

$\varphi_o = o$, φ_1, φ_2, ... φ_p; die entsprechenden Werte von x und y seien mit demselben Index bezeichnet, wie der zugehörige Wert von φ.

Wir wollen φ beständig wachsen lassen. Dann wächst x von $x_o = o$ bis $x_{max.} = x_1$, danach nimmt es bis $x_{min.} = x_3$ ab, hierauf wächst es bis $x_{max.} = x_5$, u. s. w. y wächst von $y_{min.} = y_o = o$ bis $y_{max.} = y_2$, dann sinkt es bis $y_{min.} = y_4$, um hierauf bis $y_{max.} = y_6$ zu wachsen, u. s. w. Der Kurvenzweig ist positiv gekrümmt im Bereich $o \leqq \varphi < \varphi_1$, negativ gekrümmt im Intervall $\varphi_1 < \varphi < \varphi_3$, wieder positiv gekrümmt im Bereich $\varphi_3 < \varphi < \varphi_5$, wieder negativ gekrümmt im Intervall $\varphi_5 < \varphi < \varphi_7$, und so geht es abwechselnd weiter.

4. Allgemeine Darstellung der verbogenen Fläche (3).

Unter Berücksichtigung der Gl-en (22) und (23) folgt:

$$\alpha = \frac{dx}{ds} = \cos A\varphi, \quad \beta = \frac{dy}{ds} = \sin A\varphi, \quad \gamma = \frac{dz}{ds} = o.$$

$$\lambda = o, \quad \mu = o, \quad \nu = 1$$

Aus (7) und (8) bekommt man:

$$p = \frac{c^2 - a^2}{\sqrt{c^2 + a^2}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \varphi} \cdot \frac{1}{1 - \frac{k'^2}{k^2} \operatorname{tg}^2 \varphi}$$

$$q = \frac{2ac}{\sqrt{a^2 + c^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{k'^2}{k^2} \operatorname{tg}^2 \varphi}}$$

Die Gl-en (3) der verbogenen Fläche lauten jetzt:

$$\begin{cases} x_1 = x + u \cdot \dfrac{c^2 - a^2}{\sqrt{c^2 + a^2}} \cdot \dfrac{\cos A\varphi}{\cos^2\varphi\left(1 - \dfrac{k'^2}{k^2}\operatorname{tg}^2\varphi\right)} \\ y_1 = y + u \cdot \dfrac{c^2 - a^2}{\sqrt{c^2 + a^2}} \cdot \dfrac{\sin A\varphi}{\cos^2\varphi\left(1 - \dfrac{k'^2}{k^2}\operatorname{tg}^2\varphi\right)} \\ z_1 = u \cdot \dfrac{2ac}{\sqrt{c^2 + a^2}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{k'^2}{k^2}\operatorname{tg}^2\varphi}}. \end{cases}$$

x und y haben dabei die in (23) angegebenen Werte.

Gültigkeitsbereich für φ: $-\operatorname{arc\,tg}\dfrac{k}{k'} \leqq \varphi \leqq \operatorname{arc\,tg}\dfrac{k}{k'}$.

Nach diesen allgemeinen Erörterungen werden wir in § 3 für einige spezielle Fälle die vorkommenden Integrationen ausführen. Jetzt wollen wir die Asymptotenlinien und die Striktionslinie des Hyperboloids (2) bestimmen, deren Biegungskurven von Wichtigkeit sind.

§ 2. Kurven auf dem Hyperboloid.

1. Die Asymptotenlinien in Parameterdarstellung.

Die beiden Scharen von Geraden bilden bekanntlich die Asymptotenlinien des Hyperboloids. Die erste Schar von Asymptotenlinien hat die Parameterdarstellung $v = \text{konst.}$ Um die zweite Schar von Asymptotenlinien zu bestimmen, gehen wir von der Differentialgleichung der Asymptotenlinien[1]) aus:

$$D\,du^2 + 2\,D'\,du\,dv + D''\,dv^2 = 0, \tag{1}$$

wo D, D', D'' die Werte haben:

---

[1]) L. Bianchi, Vorlesungen über Differentialgeometrie, 2. Aufl. S. 108 und 86.

$$(2)\qquad D\sqrt{EG-F^2}=\begin{vmatrix} \frac{d^2x}{du^2}, & \frac{d^2y}{du^2}, & \frac{d^2z}{du^2} \\ \frac{dx}{du}, & \frac{dy}{du}, & \frac{dz}{du} \\ \frac{dx}{dv}, & \frac{dy}{dv}, & \frac{dz}{dv} \end{vmatrix},$$

$$D'\sqrt{EG-F^2}=\begin{vmatrix} \frac{d^2x}{du\,dv}, & \frac{d^2y}{du\,dv}, & \frac{d^2z}{du\,dv} \\ \frac{dx}{du}, & \frac{dy}{du}, & \frac{dz}{du} \\ \frac{dx}{dv}, & \frac{dy}{dv}, & \frac{dz}{dv} \end{vmatrix},$$

$$D''\sqrt{EG-F^2}=\begin{vmatrix} \frac{d^2x}{dv^2}, & \frac{d^2y}{dv^2}, & \frac{d^2z}{dv^2} \\ \frac{dx}{du}, & \frac{dy}{du}, & \frac{dz}{du} \\ \frac{dx}{dv}, & \frac{dy}{dv}, & \frac{dz}{dv} \end{vmatrix}$$

Indem wir aus (2) im § 1 die vorkommenden Ableitungen bilden und sie in (2) einsetzen, bekommen wir:

$$D=0,$$

$$D'\sqrt{EG-F^2}=4abc,$$

$$D''\sqrt{EG-F^2}=-8abcu^2$$

(1) reduziert sich auf die Form:

$$2D'du\,dv+D''dv^2=0.$$

Da für die zweite Schar der Asymptotenlinien $v=$ konst., folglich $dv\neq 0$, so erhalten wir für sie die Differentialgleichung:

$$2D'du+D''dv=0 \text{ oder } \frac{2D'}{D''}du+dv=0.$$

Indem wir die Werte von D′ und D″ hierin einsetzen und die Integration ausführen, bekommen wir:

$$(B)\qquad \frac{1}{u}+v=\text{Const.}$$

als die Gleichung der zweiten Schar der Asymptotenlinien des Hyperboloids (2) im § 1.

2. Die Striktionslinie in Parameterdarstellung.

Die Gleichung der Striktionslinie heißt allgemein für eine Linienfläche:[1])

$$(1) \qquad M^2 \bar{u} + N = 0,$$

$$\text{wo} \quad M^2 = \left(\frac{dl}{d\bar{v}}\right)^2 + \left(\frac{dm}{d\bar{v}}\right)^2 + \left(\frac{dn}{d\bar{v}}\right)^2,$$

$$N = \frac{dl}{d\bar{v}} \cdot \frac{d\bar{p}}{d\bar{v}} + \frac{dm}{d\bar{v}} \cdot \frac{d\bar{q}}{d\bar{v}} + \frac{dn}{d\bar{v}} \cdot \frac{d\bar{r}}{d\bar{v}}.$$

Dabei ist $\bar{v}$ der von einem festen Punkte der Direktrix $u = o$ gerechnete Bogen dieser Kurve, $\bar{p}$, $\bar{q}$, $\bar{r}$ sind die laufenden Koordinaten eines Punktes von $u = o$, ausgedrückt als Funktionen von $\bar{v}$ während l, m, n die Richtungskosinus der durch den Punkt $(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r})$ von $u = o$ hindurchgehenden Erzeugenden bezeichnen und ebenfalls bestimmte Funktionen von $\bar{v}$ sind. Wir bezeichnen ferner mit $\bar{u}$ den algebraischen Betrag desjenigen Stückes der Erzeugenden, das zwischen dem Punkte $(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r})$ der Direktrix und einem beliebigen Punkte (x, y, z) der Erzeugenden liegt.

Wir können $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{p}$, $\bar{q}$, $\bar{r}$, l, m, n durch die in (2) des § 1 vorkommenden Parameter u und v ausdrücken.

Es wird: $\bar{p} = a\,v$, $\bar{q} = b$, $\bar{r} = c\,v$;

$$l : m : n = a\,(v^2 - 1) : 2\,b\,v : c\,(v^2 + 1).$$

$$(2) \qquad \bar{u} = u\sqrt{a^2(v^2 - 1)^2 + 4b^2v^2 + c^2(v^2 + 1)^2} = u\sqrt{E}$$

[nach (4) im § 1], $\bar{v} = v\sqrt{a^2 + c^2} = s$ [nach (6) im § 1].

Nach einiger Rechnung findet man:

$$\left(\frac{dl}{d\bar{v}}\right)^2 = \frac{16a^2(b^2 + c^2)^2 v^2 (v^2 + 1)^2}{(a^2 + c^2)\,E^3},$$

$$\left(\frac{dm}{d\bar{v}}\right)^2 = \frac{4b^2(a^2 + c^2)^2 (1 - v^2)^2 (1 + v^2)^2}{(a^2 + c^2)\,E^3},$$

$$\left(\frac{dn}{d\bar{v}}\right)^2 = \frac{16c^2(b^2 - a^2)^2 v^2 (v^2 - 1)^2}{(a^2 + c^2)\,E^3};$$

---

[1]) L. Bianchie, Vorlesungen, S. 225 (Vertauschte Parameter!)

$$\frac{d\bar{p}}{dv} = \frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}},\ \frac{d\bar{q}}{dv} = o,\ \frac{d\bar{r}}{dv} = \frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}.$$

Daraus folgt:

$$M^2 = \frac{16a^2(b^2+c^2)^2v^2(v^2+1)^2 + 4b^2(a^2+c^2)^2(1-v^2)(1+v^2)^2 + 16c^2(b^2-a^2)^2v^2(v^2-1)^2}{(a^2+c^2)E^3}$$

$$N = \frac{4a^2(b^2+c^2)v(v^2+1) + 4c^2(b^2-a^2)v(v^2-1)}{(a^2+c^2)E^{3/2}}$$

Setzen wir aus (2) den Wert von $\bar{u}$ in (1) ein, so erhalten wir:

$$M^2 u\sqrt{E} + N = O \text{ oder } u = -\frac{N}{M^2\sqrt{E}}$$

Also lautet die Gl. der Striktionslinie des Hyperboloids:

(3)
$$u = -\frac{[4a^2(b^2+c^2)v(v^2+1) + 4c^2(b^2-a^2)v(v^2-1)]\,[a^2(v^2-1)^2 + 4b^2v^2 + c^2(v^2+1)^2]}{16a^2(b^2+c^2)^2v^2(v^2+1)^2 + 4b^2(a^2+c^2)^2(1-v^2)^2(1+v^2)^2 + 16c^2(b^2-a^2)v^2(v^2-1)^2}$$

Im Falle eines Rotationshyperboloids ($a = b$) reduziert sich (3) auf die Gleichung:

(4)
$$u = -\frac{v}{v^2+1}.$$

Dieselbe Gleichung bekommt man, wenn man in der Parameterdarstellung (2) des § 1 $z = o$ setzt. Daraus geht hervor, daß bei einem einschaligen Rotationshyperboloid die Striktionslinie der Kehlkreis ist,[1]) der bei jeder Verbiegung der Fläche in eine Bertrandsche Kurve ein und derselben Gattung übergeht, falls die Biegungsfläche eine Linienfläche bleibt.[2])

An dieser Stelle können wir gleich die Frage beantworten:

---

[1]) Bianchie, S. 237.

[2]) Ibid., S. 591.

Wann sind unter Berücksichtigung unserer Beschränkungen:

$A = \frac{m}{2}$, $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ Rotationshyperboloide möglich?

Aus (16) findet man für $a = b$:

$$A = \frac{2c}{\sqrt{c^2 - a^2}}, \text{ also } (A^2 - 4)\, c^2 - A^2 a^2.$$

Daraus folgt, daß $A > 2$ sein muß.

Es folgt weiter:

$$b = a = \frac{\sqrt{A^2 - 4}}{A} \cdot c, \quad k = \frac{\sqrt{A^2 - 4}}{A}.$$

Für Rotationshyperboloide gelten somit die Achsenverhältnisse:

$$a : b : c = k : k : 1,$$

wobei k für $A =$ Konst. einen bestimmten Wert erhält.

§ 3. Spezielle Fälle der Biegungsregelfläche.

1) $A = 1$.

a) Integration der Gleichungen der verbogenen Direktrix $u = o$.

Die Gl-en (16) im § 1 lauten in diesem Falle:

$$(1) \qquad k = \frac{2ac}{a^2 + c^2}, \; k' = \frac{c^2 - a^2}{c^2 + a^2}, \; b = \frac{k}{2}\sqrt{c^2 - a^2},$$

$$B = \frac{a\,c\,k}{\sqrt{c^2 - a^2}}, \; \frac{B}{b} = \frac{k}{k'}.$$

Die Biegungskurve (17) im § 1 der Direktrix erhält die Gleichungen:

$$(2) \qquad x = \int_0^s \cos \operatorname{arc\,tg} \frac{Bs}{\sqrt{b^2 s^2 + a^2 c^2}}\, ds,$$

$$(2)\qquad y = \int_0^s \sin \operatorname{arc\,tg} \frac{Bs}{\sqrt{b^2 s^2 + a^2 c^2}}\, ds,\quad z = 0.$$

Wir führen die Integration aus durch den Ansatz:

$$(3)\qquad s = \frac{ac}{b} \operatorname{cotg} \psi = \frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{k'} \operatorname{cotg} \psi,$$

$$ds = -\frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{k'} \frac{d\psi}{\sin^2 \psi}$$

Dann wird:

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{Bs}{\sqrt{b^2 s^2 + a^2 c^2}} = \dfrac{B}{b} \cos \psi = \dfrac{k}{k'} \cdot \cos \psi, \\ \cos \operatorname{arc\,tg} \dfrac{Bs}{\sqrt{b^2 s^2 + a^2 c^2}} \\ = \cos \operatorname{arc\,tg} \dfrac{k \cos \psi}{k'} = \dfrac{k'}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}, \\ \sin \operatorname{arc\,tg} \dfrac{Bs}{\sqrt{b^2 s^2 + a^2 c^2}} \\ = \sin \operatorname{arc\,tg} \dfrac{k \cos \psi}{k'} = \dfrac{k \cos \psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}. \end{cases}$$

Die Gl-en (2) gehen in folgende über:

$$(5)\qquad x = -\sqrt{c^2 - a^2} \int_{\pi/2}^{\psi} \frac{d\psi}{\sin^2 \psi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}},$$

$$y = -\frac{k}{k'} \sqrt{c^2 - a^2} \int_{\pi/2}^{\psi} \frac{\cos \psi\, d\psi}{\sin^2 \psi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}},\quad z = 0.$$

Indem wir von der Relation Gebrauch machen:[1])

$$\operatorname{cotg} \psi\ \Delta\psi = -\int \frac{d\psi}{\Delta\psi \sin^2 \psi} + k^2 \int \frac{\sin^2 \psi\, d\psi}{\Delta\psi},$$

$$\text{wo } \Delta\psi = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} \text{ ist,}$$

erhalten wir für x:

[1]) A. Enneper, Ellipt. Funkt. 2. Aufl. S. 20.

$$x = \left\{ \operatorname{cotg} \psi \cdot \Delta\psi + k^2 \int_{\psi}^{\pi/2} \frac{\sin^2 \psi \, d\psi}{\Delta\psi} \right\} \cdot \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$= \sqrt{c^2 - a^2} \left\{ \operatorname{cotg}\psi \cdot \Delta\psi + (K - E) - [F(k, \psi) - E(k, \psi)] \right\},$$

wo $F(k', \psi)$ und $E(k', \psi)$ die elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung, E und K die vollständigen elliptischen Integrale sind.

y wird elementar ausgeführt, und wir bekommen als Gleichungen der Direktrix $u = o$:

$$(6)\, x = \sqrt{c^2 - a^2} \left\{ \Delta\psi \operatorname{cotg} \psi - F(k', \psi) + E(k', \psi) + K - E \right\},$$

$$y = \frac{k}{k'} \sqrt{c^2 - a^2} \left\{ \frac{\Delta\psi}{\sin \psi} - k' \right\}, \quad z = o$$

Gültigkeitsbereich für ψ: $o \leqq \psi \leqq \pi$.

Für die Ermittelung der Gestalt dieser Kurve sind außer den Gl-en (6) folgende maßgebend:

$$\frac{dx}{d\psi} = -\sqrt{c^2 - a^2} \, \frac{1}{\Delta\psi \sin^2 \psi}, \quad \frac{dy}{d\psi} = -\frac{k}{k'} \sqrt{c^2 - a^2} \, \frac{\cos \psi}{\Delta\psi \sin^2 \psi}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k}{k'} \cos \psi, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{k}{k' \sqrt{c^2 - a^2}} \Delta\psi \sin^3 \psi$$

Es genügt, wenn wir den dem Bereich $o \leqq \psi \leqq \frac{\pi}{2}$ entsprechenden Kurvenzweig bestimmen, weil der dem Bereich $\frac{\pi}{2} \leqq \psi \leqq \pi$ entsprechende Zweig zu dem ersten in bezug anf die y-Achse symmetrisch liegt; es gelten nämlich die Beziehungen: $(x)_{\pi - \psi} = -(x)_{\psi}$, $(y)_{\pi - \psi} = (y)_{\psi}$.

Der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ bleibt stets positiv, y wächst also mit zunehmendem x. Für $\psi = \frac{\pi}{2}$ ist $\frac{dy}{dx} = o$, $\frac{d^2 y}{dx^2} > o$, $(x = o, \; y = o)$. y hat also im Anfangspunkte

einen Minimalwert. Für $\psi = 0$ hat $\frac{dy}{dx}$ seinen Maximalwert $\frac{k}{k'}$ erreicht, x und y werden unendlich; die Kurventangente strebt in diesem Punkte einer Grenzlage zu, sie wird mithin zur Asymptote. Die Gleichung derselben lautet:

$$(8) \quad y = \frac{k}{k'} x - \frac{k}{k'} \sqrt{c^2 - a^2} (K - E + k').$$

Sie wird erhalten aus der Gleichung: $y = m x + h$, wobei

$$m = \lim_{\psi = 0} \left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{k}{k'}, \; h = \lim_{\psi = 0} (y - m x)$$

$$= \frac{k}{k'} \sqrt{c^2 - a^2} \left(\frac{\Delta\psi}{\sin\psi} - \Delta\psi \operatorname{cotg}\psi\right)_{\psi = 0} = -\frac{k}{k'} (k' + K - E).$$

Der Differentialquotient $\frac{d^2 y}{dx^2}$ ist stets positiv, die Kurve st mithin stets positiv gekrümmt. Der Krümmungsradius ϱ wird durch die Gleichung bestimmt: $\varrho = \frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{k k'^2} \cdot \frac{\Delta^2\psi}{\sin^3\psi}$; ϱ wächst mit abnehmendem ψ von seinem kleinsten Werte $\varrho_{min.} = \frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{k}$, welcher für $\psi = \frac{\pi}{2}$ eintritt, bis zu seinem größten Werte $\varrho_{max.} = \infty$, der sich für $\psi = 0$ ergibt.

b) Parameterdarstellung der verbogenen Fläche.

Mit Rücksicht auf die Gl-en (3) und (7) erhalten wir:

$$(9) \quad \alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{k'}{\Delta\psi}, \; \beta = \frac{dy}{ds} = \frac{k \cos\psi}{\Delta\psi}, \; \gamma = \frac{dz}{ds} = 0;$$

$$\lambda = \mu = 0, \; \nu = 1.$$

Nehmen wir noch die Gl-en (7) und (8) im § 1 zu Hilfe, so wird:

$$10) \quad p = \frac{\sqrt{c^2 + a^2}}{k'} \cdot \frac{\Delta^2\psi}{\sin^2\psi}, \; q = k\sqrt{a^2 + c^2} \cdot \frac{1}{\sin\psi}.$$

Die Gleichungen der verbogenen Fläche (3) im § 1 lauten mithin:

$$(11)\quad \begin{cases} x_1 = x + u\sqrt{c^2+a^2}\,\dfrac{\Delta\psi}{\sin^2\psi} \\ y_1 = y + u\,\dfrac{k}{k'}\sqrt{c^2+a^2}\,\dfrac{\Delta\psi\cos\psi}{\sin^2\psi} \\ z_1 = u\,k\sqrt{a^2+c^2}\cdot\dfrac{1}{\sin\psi}. \end{cases}$$

Für x und y sind hierbei die Werte aus den Gl-en (6) einzusetzen.

Gültigkeitsbereich für $\psi: o \leqq \psi \leqq \pi$.

c) Untersuchung der Schnitte $z_1 = $ konst. der Fläche (11).

Wir setzen $z_1 = \mu\sqrt{c^2-a^2} = $ konst. und werden im folgenden von einem Schnitte μ sprechen, indem wir darunter denjenigen Schnitt $z_1 = $ konst. verstehen, dem der Wert μ zukommt.

Aus der 3. Gleichung in (11) folgt:

$$u = \frac{z_1}{k\sqrt{a^2+c^2}}\cdot\sin\psi = \frac{\mu}{k}\sqrt{\frac{c^2-a^2}{c^2+a^2}}\sin\psi$$

Setzen wir diesen Wert von u in die Gl-en (11) ein, so folgt: (12)

$$x_1 = \sqrt{c^2-a^2}\left\{\frac{\cos\psi+\frac{\mu}{k}}{\sin\psi}\Delta\psi - F(k,\psi) + E(k,\psi) + K - E\right\}$$

$$y_1 = \frac{k}{k'}\sqrt{c^2-a^2}\left\{\frac{1+\frac{\mu}{k}\cos\psi}{\sin\psi}\Delta\psi - k'\right\},$$

$$z_1 = \sqrt{c^2-a^2}\cdot\mu$$

Gültigkeitsbereich für $\psi: o \leqq \psi \leqq \pi$.

Für die Ermittelung der Gestalt der Kurven $\mu = \text{konst.}$ sind außer den Gleichungen (12) folgende Ableitungen maßgebend:

$$(13)\quad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{d\psi} = -\sqrt{c^2 - a^2}\cdot \dfrac{1 + \dfrac{\mu}{k}\cos\psi}{\sin^2\psi\, \Delta\psi}, \\[2ex] \dfrac{dy_1}{d\psi} = \dfrac{k}{k'}\sqrt{c^2 - a^2}\, \dfrac{\dfrac{\mu}{k}(k^2\sin^4\psi - 1) - \cos\psi}{\sin^2\psi\, \Delta\psi} \\[2ex] \dfrac{dy_1}{dx_1} = -\dfrac{k}{k'}\, \dfrac{\dfrac{\mu}{k}(k^2\sin^4\psi - 1) - \cos\psi}{1 + \dfrac{\mu}{k}\cos\psi}, \\[2ex] \dfrac{dx_1}{dy_1} = -\dfrac{k'}{k}\, \dfrac{1 + \dfrac{\mu}{k}\cos\psi}{\dfrac{\mu}{k}(k^2\sin^4\psi - 1) - \cos\psi}. \end{cases}$$

$$(14)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2 y_1}{dx_1^2} = \dfrac{\dfrac{k}{k'}\Delta\psi\sin^3\psi}{\sqrt{c^2 - a^2}\left(1 + \dfrac{\mu}{k}\cos\psi\right)^3} \\[2ex] \left\{(1 + 4\mu k\sin^2\psi\cos\psi)\left(1 + \dfrac{\mu}{k}\cos\psi\right) + \dfrac{\mu}{k}\left[\dfrac{\mu}{k}(k^2\sin^4\psi - 1) - \cos\psi\right]\right\} \\[2ex] \dfrac{d^2 x_1}{dy_1^2} = \dfrac{\dfrac{k'^2}{k^2}\Delta\psi\sin^3\psi.}{\sqrt{c^2 - a^2}\left[\dfrac{\mu}{k}(k^2\sin^4\psi - 1) - \cos\psi\right]^3} \\[2ex] \left\{(1 + 4\mu k\sin^2\psi\cos\psi)\left(1 + \dfrac{\mu}{k}\cos\psi\right) + \dfrac{\mu}{k}\left[\dfrac{\mu}{k}(k^2\sin^4\psi - 1) - \cos\psi\right]\right\} \end{cases}$$

I. Die Extremwerte von x_1 sind durch die Gleichung:

$$\frac{dx_1}{dy_1} = 0, \text{ d. h. } Z' = 1 + \frac{\mu}{k}\cos\psi = 0$$

bestimmt. Daraus folgt:

$$(15)\quad \begin{cases} (\mu)_{Z'=0} = -\dfrac{k}{\cos\psi}, \\ (N')_{Z'=0} = \left\{\dfrac{\mu}{k}(k^2\sin^4\psi - 1) - \cos\psi\right\}_{Z'=0} \\ \qquad\qquad = \dfrac{\sin^2\psi\,\Delta^2\psi}{\cos\psi} \\ \left(\dfrac{d^2x_1}{dy_1^2}\right)_{Z'=0} = -\dfrac{k'^2}{k^2}\cdot\dfrac{\cos\psi}{\sqrt{c^2 - a^2\sin\psi\,\Delta^3\psi}} \end{cases}$$

Hier sind offenbar zwei Fälle zu unterscheiden:
1) $Z' = 0$ und gleichzeitig $N' = 0$. Dies kann nur für $\psi = 0$ und $\psi = \pi$ eintreten. Der Ausdruck für $\frac{dx_1}{dy_1}$ hat an der Stelle $\psi = 0$ den Wert $\left(\frac{dx_1}{dy_1}\right)_{\psi=0} = \frac{k'}{k}$ und an der Stelle $\psi = \pi$ den Wert $\left(\frac{dx_1}{dy_1}\right)_{\psi=\pi} = -\frac{k'}{k}$; dies gilt für jedes μ, folglich auch für $|\mu| = k$, welchen Wert μ in unserem Falle annimmt. Die Werte von x_1 und y_1 werden unbestimmt. Schreiben wir y_1 in der Form:

$$y_1 = \frac{k}{k'}\sqrt{c^2 - a^2}\left\{\frac{\Delta\psi}{\cos\psi}\cdot\frac{\cos\psi + \frac{\mu}{k}}{\sin\psi} - \Delta\psi\,\mathrm{tg}\,\psi - k'\right\}$$

und berücksichtigen wir nun, daß der in x_1 und y_1 vorkommende Ausdruck $\dfrac{\cos\psi + \frac{\mu}{k}}{\sin\psi}$ jeden beliebigen Wert U für $\psi = 0$ und jeden beliebigen Wert U_1 für $\psi = \pi$ annehmen kann, so ergibt sich aus den Gl-en (12):

$$(16)\quad (x_1)_{\psi=o} = \sqrt{c^2-a^2}\,(U+K-E), \qquad -\infty < U < +\infty$$

$$(y_1)_{\psi=o} = \frac{k}{k'}\sqrt{c^2-a^2}\,(U-k')$$

$$(17)\quad (x_1)_{\psi=\pi} = \sqrt{c^2-a^2}\,(U_1-K+E), \qquad -\infty < U_1 < +\infty$$

$$(y_1)_{\psi=\pi} = -\frac{k}{k'}\sqrt{c^2-a^2}\,(U_1+k')$$

Nun gilt wegen der Gl. (6) im § 1 und unseres Ansatzes (3) die Beziehung:

$$(A)\qquad v = \frac{1}{\sqrt{k'}\,\mathrm{tg}\,\psi}$$

Das Ergebnis können wir nunmehr so aussprechen:

Die Gerade $\psi = o$ $(v = +\infty)$ liegt in der Ebene $\mu = -k$ und besitzt die Richtungskonstante $\left(\frac{dx_1}{dy_1}\right)_{\psi=o} = \frac{k'}{k}$. Die Gerade $\psi = \pi$ $(v = -\infty)$ liegt in der Ebene $\mu = +k$ und besitzt die Richtungskonstante $\left(\frac{dx_1}{dy_1}\right)_{\psi=\pi} = -\frac{k'}{k}$.

Für die Schnitte $|\mu| \neq k$ sind $\psi = o$ und $\psi = \pi$ die unendlich fernen Punkte. In diesen Punkten haben die Kurventangenten, wie oben angedeutet, für jeden Schnitt $\mu = \text{konst.}$ die Richtungskonstanten $\left(\frac{dx_1}{dy_1}\right)_{\psi=o} = \frac{k'}{k}$ und $\left(\frac{dx_1}{dy_1}\right)_{\psi=\pi} = -\frac{k'}{k}$.

Folglich sind diese Richtungen Asymptotenrichtungen der Schnitte $\mu = \text{konst.}$ Die Gleichung der Asymptote im Punkte $\psi = o$ der Kurve $\mu = \text{konst.}$, die durch die Gl-en (12) bestimmt ist, wird aus der Gleichung $x = my + h$ erhalten, wo $m = \lim_{\psi=o}\left(\frac{dx_1}{dy_1}\right) = \frac{k'}{k}$, $h = \lim_{\psi=o}(x - my) = \sqrt{c^2-a^2}\,(k'+K-E)$

Die Gleichung der Asymtote im Punkte $\psi = 0$, bzw. m Punkte $\psi = \pi$, lautet also:

$$(16') \qquad x = \frac{k'}{k} y + \sqrt{c^2 - a^2}(k' + K - E)$$

$$(17') \qquad x = -\frac{k'}{k} y - \sqrt{c^2 - a^2}(k' + K - E).$$

Diese Gleichungen sind aber dieselben wie (16) und (17), nur in anderer Form geschrieben; mithin können wir sagen:

Die Projektionen der Geraden $\psi = 0$ und $\psi = \pi$ auf die Ebenen $\mu =$ konst. sind die Asymptotenlinien der Parallelschnitte $\mu =$ konst. der Biegungsfläche. Später werden wir von den Geraden $\psi = 0$ und $\psi = \pi$ noch Einiges zu sagen haben.

2) $Z' = 0$, $N' \neq 0$. Dies ist dann erfüllt, wenn $Z' = 0$ und $\psi \neq 0$, $\psi \neq \pi$. Nach den Gl-en (15) läßt sich feststellen, daß $\left(\frac{d^2x_1}{dy_1^2}\right)_{Z'} > 0$, wenn ψ im Intervalle $\frac{\pi}{2} < \psi < \pi$ bleibt, und $\left(\frac{d^2x_1}{dy_1^2}\right)_{Z' = 0} < 0$, wenn ψ das Intervall $0 < \psi < \frac{\pi}{2}$ durchläuft.

Resultat: Bleibt ψ im Intervalle $\frac{\pi}{2} < \psi < \pi$, so entspricht jedem ψ ein Schnitt $\mu = -\frac{k}{\cos\psi}$ $(\mu > k)$, dessen x_1 in dem Punkte ψ ein Minimum besitzt. Jedem ψ im Intervalle $0 < \psi < \frac{\pi}{2}$ entspricht ein Schnitt $\mu = -\frac{k}{\cos\psi}$ $(\mu < -k)$, dessen x_1 in dem Punkte ψ ein Maximum wird. Ein vollständiges Resultat wird erst später angegeben.

II. Die Extremwerte für y_1 sind durch die Gleichung

$$\frac{dy_1}{dx_1} = 0, \text{ d. h. } Z = \frac{\mu}{k}(k^2 \sin^4\psi - 1) - \cos\psi = 0$$

bestimmt.

Aus den Gl-en (13) und (14) ergibt sich:

$$(18)\qquad (N)_{z=o} = \left(1+\frac{\mu}{k}\cos\psi\right)_{z=o} = \frac{\sin^2\psi\,\Delta^2\psi}{1-k^2\sin^4\psi}$$

$$(19)\qquad \left(\frac{d^2y_1}{dx_1^{\,2}}\right)_{z=o} = \frac{3k^3}{k'\sqrt{c^2-a^2}}\cdot\frac{1-k^2\sin^4\psi}{\sin\psi\,\Delta^3\psi}$$

$$\left(\sin^2\psi-\frac{2}{3}-\sqrt{\frac{4}{9}-\frac{1}{3k^2}}\right)\left(\sin^2\psi-\frac{2}{3}+\sqrt{\frac{4}{9}-\frac{1}{3k^2}}\right)$$

Wenn wir die bereits behandelten Fälle, wo Z und N gleichzeitig verschwinden, ausschließen, so wird

$$\left(N\right)_{z=o} \text{ beständig positiv.}$$

Nun müssen wir die Wurzeln der Gleichung

$$(20)\qquad \frac{\mu}{k}\left(k^2\sin^4\psi-1\right)-\cos\psi=o$$

bestimmen. Indem wir nun berücksichtigen, daß wir die Fälle: $\mu=o\,(\psi=\frac{\pi}{2})$, $\mu=-k\,(\psi=o)$ und $\mu=k\,(\psi=\pi)$ bereits kennen gelernt haben, können wir die Gl. (20) in der Form schreiben:

$$(20')\qquad \cos^4\psi-2\cos^2\psi-\frac{1}{k\mu}\cos\psi-\frac{1-k^2}{k^2}=o.$$

Gültigkeitsbereich für ψ: $o<\psi<\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}<\psi<\pi$.

Durch den Ansatz $\cos\psi=t$ geht die letzte Gleichung in folgende über:

$$(21)\qquad t^4-2t^2-\frac{1}{k\mu}t-\frac{1-k^2}{k^2}=o.$$

Gültigkeitsbereich für t: $o<|t|<1$.

Dabei ist zu beachten, daß

$$o<k<1,\ \mu\neq o,\ |\mu|\neq k$$

bleiben müssen. Die Anzahl der reellen Wurzeln der Gl. (21) können wir durch Untersuchung ihrer Diskriminante D feststellen. Es wird:[1])

$$\frac{27}{256}k^6 D=\left(4k^2-3\right)^3-k^2\left(8k^2-9+\frac{27}{16\mu^2}\right)^2$$

[1]) H. Weber, Algebra I, S. 246.

1) $D < o$ ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Gl. (21) zwei reelle verschiedene Wurzeln hat. Das kann eintreten, wenn

α) $4k^2 - 3 < o$, also $k^2 < \frac{3}{4}$

β) $4k^2 - 3 = o$ und $\left(8k^2 - 9 + \frac{27}{16\mu^2}\right)^2 > o$,

also $k^2 = \frac{3}{4}$ und $\frac{1}{\mu^2} \neq \frac{16}{9}$

γ) $4k^2 - 3 > o$, also $k^2 > \frac{3}{4}$ ist.

Im letzten Falle muß μ eine Beschränkung erfahren, die wir später bestimmen werden.

2) $D = o$ ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß (21) gleiche Wurzeln besitzt. Dabei können folgende Fälle eintreten:

α) vier reelle Wurzeln, von denen drei gleich sind, wenn $4k^2 - 3 = o$ und $8k^2 - 9 + \frac{27}{16\mu^2} = o$,

also $k^2 = \frac{3}{4}$, $\mu^2 = \frac{9}{16}$ wird.

β) vier reelle Wurzeln, von denen zwei gleich sind, wenn $4k^2 - 3 > o$, also $k^2 > \frac{3}{4}$ wird; die Beschränkung für μ wird später bestimmt.

3) $D > o$ ist notwendig und hinreichend, damit die Gl. (21) vier verschiedene reelle Wurzeln hat. Es muß

$$4k^2 - 3 > o, \text{ also } k^2 > \frac{3}{4}$$

sein; μ wird später passend beschränkt.

Diese Betrachtungen gelten, wenn t in der Gl. (21) nicht beschränkt ist. Da aber für uns das Intervall $o < |t| < 1$ in Betracht kommt, und außerdem die Koeffizienten der Gl. (21) zum Teil gewisse Änderungsbereiche besitzen, so wollen wir das übersichtlichere graphische Verfahren zu Hilfe nehmen.

Wir schreiben die Gl. (21) in der Form:

$$(21') \qquad (1-t^2)^2 = \frac{1}{k\mu}t + \frac{1}{k^2}$$

und konstruieren die Funktionen:

$$r = (1-t^2)^2 \text{ und } r = \frac{1}{k\mu}t + \frac{1}{k^2}.$$

Die Schnittpunkte der diese Funktionen darstellenden Kurven sind bekanntlich die Wurzeln der Gl. (21).

Aus (21') folgt, daß $\operatorname{sgn}\mu = -\operatorname{sgn} t$ sein muß, damit die Gleichung erfüllt werden kann; denn die linke Seite der Gl. (21') ist stets kleiner als 1, während der Summand $\frac{1}{k^2}$ auf der rechten Seite größer als 1 ist. Es genügt deshalb, wenn wir den Fall $-1 < t < o$ untersuchen und das Resultat sinngemäß auf den Fall $o < t < 1$ ausdehnen.

Wir untersuchen jetzt die Gestalt der Kurve:

$$(22) \qquad r = (1-t^2)^2$$

Es ist: $r' = -4t(1-t^2)$, $r'' = -4(1-3t^2)$, $r''' = 24t$.

Die r-Achse ist die Symmetrieachse der Kurve, deshalb genügt es, wenn wir den Kurvenzweig $-\infty \leqq t \leqq o$ betrachten.

Wächst t von $t = -\infty$ bis $t = -1$, so bleibt r' beständig negativ und nimmt zu von $r' = -\infty$ bis $r' = o$. r selbst sinkt beständig von $r = +\infty$ bis $r = o$. Wächst t weiter von $t = -1$ bis $t = o$, so bleibt r' beständig positiv; es besitzt dabei den Anfangs- und den Endwert Null. r wächst von $r_{min.} = o$ bis $r_{max.} = 1$. Der Kurvenzweig ist im Intervalle $-\infty \leqq t < -\frac{1}{\sqrt{3}}$ positiv, von hieran bis zu dem Werte $t = o$ negativ gekrümmt. Der Punkt $t = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ist mithin ein Wendepunkt des Zweiges.

Die Gerade $r = \frac{1}{k\mu}t + \frac{1}{k^2}$ schneidet die r-Achse stets oberhalb des Einheitspunktes $(t = o, r = 1)$, da $\frac{1}{k^2} > 1$ ist.

Sie schneidet die Kurve (22) außerhalb des Intervalls $o < |t| < 1$ mindestens in einem und höchstens in zwei Punkten. Die Gerade kann nicht die Kurve (22) außerhalb jenes Intervalls in 1. oder höherer Ordnung berühren, weil die Kurve dort stets ihre konkave Seite der Geraden zuwendet.

Für eine gegebene Fläche ist k konstant; wir müssen daher die Fallunterscheidungen hinsichtlich k treffen.

Nun haben sich bei der Feststellung der Anzahl der reellen Wurzeln der Gl. (21) drei Fälle für k, nämlich $k^2 < \frac{3}{4}$, $k^2 = \frac{3}{4}$ und $k^2 > \frac{3}{4}$, geltend gemacht. Dementsprechend werden wir drei Hauptfälle unterscheiden.

1. Fall: $k^2 < \frac{3}{4}$.

Nach den obigen Auseinandersetzungen ergibt sich, daß die Gerade

(23) $$r = \frac{1}{k\mu} t + \frac{1}{k^2}$$

die Kurve (22) im Intervalle $-1 < t < o$ nur einmal schneiden kann. Dreht man nämlich diese Gerade um den Punkt $\left(t = o, r = \frac{1}{k^2}\right)$ von ihrer Anfangslage aus, die für $\mu = o$ festgesetzt werden möge, im Sinne des Uhrzeigers, so wird sie die Kurve jedesmal in einem Punkte t_1 des Intervalls $-1 < t < o$ treffen, solange $o < \mu < k$ bleibt. Daraus folgt:

$$\left(\frac{dy_1}{dx_1}\right)_{t_1} = o.$$

Wegen unseres Ansatzes: $\cos \psi = t$ folgt aus der Gl. (19):

(24) $$\operatorname{sgn}\left(\frac{d^2 y_1}{dx_1^2}\right)_{Z=o} = \operatorname{sgn}\left(t^2 - \frac{1}{3} + \sqrt{\frac{4}{9} - \frac{1}{3k^2}}\right)$$
$$\left(t^2 - \frac{1}{3} - \sqrt{\frac{4}{9} - \frac{1}{3k^2}}\right)$$

Die zweite Ableitung bleibt in diesem Falle stets positiv.

Wir gewinnen folgendes Resultat:

Jedem k_1 des Intervalls $0 < k^2 < \frac{3}{4}$ entspricht ein Bereich für μ_1: $0 < \mu < k_1$ so, daß jedem in diesem Intervalle gelegenen Werte von μ_1 ein wohlbestimmter Wert von t_1 des Bereiches $-1 < t < 0$ entspricht, in dem das y_1 dieses Schnittes μ_1 einen Minimalwert erreicht.

Wächst t von $t = -1$ bis $t = t_1$, so bleibt $\frac{dy_1}{dx_1}$ stets negativ; x_1 wächst von $x_1 = -\infty$ bis $x_1 = (x_1)_{t_1}$, y_1 nimmt von $y_1 = +\infty$ bis $y_1 = (y_1)_{t_1}$ ab. Wächst t von t_1 bis 0 weiter, so bleibt $\frac{dy_1}{dx_1}$ stets positiv; x_1 wächst weiter von $x_1 = (x_1)_{t_1}$ bis $x_1 = +\infty$ und y_1 nimmt ebenfalls zu von seinem Minimum $y_1 = (y_1)_{t_1}$ bis $y_1 = +\infty$. Die Kurve ist stets positiv gekrümmt und hat die Asymptotenrichtungen:

$$\left(\frac{dy_1}{dx_1}\right)_{t_1 = -1} = -\frac{k}{k'} \text{ und } \left(\frac{dy_1}{dx_1}\right)_{t_1 = 0} = +\frac{k}{k'}.$$

Bei weiterer Drehung der Geraden (23) in demselben Sinne schneidet sie die Kurve (22) im Intervall $-1 < t < 0$ nicht mehr; μ_1 durchläuft dabei das Intervall $k_1 < \mu < \infty$; daraus folgt, daß das y_1 dieser Schnitte kein Extremum haben kann; daß sie aber für x_1 Minimalstellen besitzen, haben wir bereits kennen gelernt. Es sei t_1 derjenige Wert von t, für den $\left(\frac{dx_1}{dy_1}\right)$ verschwindet; da hier nach (13) $\cos\psi_1 = t_1 = -\frac{k_1}{\mu_1}$ ist, so hat man folgendes Ergebnis:

Wächst t von $t = -1$ bis $t = t_1$, so bleibt $\frac{dx_1}{dy_1}$ negativ. y_1 wächst von $y_1 = -\infty$ bis $y_1 = (y_1)_{t_1}$, während x_1 von $x_1 = +\infty$ bis $x_1 = (x_1)_{t_1}$ abnimmt. Wächst t von $t = t_1$ bis $t = 0$ weiter, so wird $\frac{dx_1}{dy_1}$ positiv; y_1 wächst weiter bis

$y_1 = +\infty$, und x_1 nimmt zu von $(x_1)_{min.} = (x_1)_{t_1}$ bis $x_1 = +\infty$. Die Kurve ist stets positiv gekrümmt, wenn sie auf die y_1-Achse als Hauptachse bezogen wird. Die Asymptotenrichtungen sind dieselben, wie bei allen Schnitten $\mu =$ konst., nämlich $-\frac{k}{k'}$ und $+\frac{k}{k'}$.

2. Fall: $k^2 = \frac{3}{4}$.

Den früheren Entwickelungen gemäß berührt die Gerade (23), deren Gleichung nunmehr lautet: $r = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{t}{\mu} + \frac{4}{3}$, die Kurve (22) in 2. Ordnung nur im Punkte $t = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ (eine dreifache Wurzel der Gl. (21)); in den übrigen Punkten des Intervalls $-1 < t < 0$ schneidet sie die Kurve (eine einfache Wurzel).

Verfährt man genau so, wie im vorigen Fall, so stellt man leicht fest, daß die dort gefundenen Resultate hier ebenfalls gelten, nur der Wert $t = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ bedarf noch einer besonderen Betrachtung. Da dieser Wert von t eine dreifache Wurzel der 1. Ableitung $\frac{dy_1}{dx_1}$ ist, so verschwinden für ihn auch die 2. und 3. Ableitungen, die 4. Ableitung dagegen nicht. Daraus folgt, daß y_1 des Schnittes $\mu = \frac{3}{4}$ an der Stelle $t = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ein Extremum besitzt, dessen Art wir durch Untersuchung der Änderung der 1. Ableitung bestimmen wollen.

Setzen wir $k = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\mu = \frac{3}{4}$ in die Gl. (13c) ein, so wird:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\left(t + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \left(\sqrt{3} - t\right)}{t + \frac{2}{\sqrt{3}}},$$

Gültigkeitsbereich für t: $-1 < t < o$.

Berücksichtigen wir nun, daß nach der Gl. (13ª) $\frac{dx_1}{d\psi} < o$, also $\frac{dx_1}{dt} > o$ ist, und bezeichnen wir mit ε eine sehr kleine positive Größe, so wird das genannte Extremum wegen der Beziehungen

$$\left(\frac{dy_1}{dx_1}\right)_{t=-\frac{1}{\sqrt{3}}-\varepsilon} < o, \quad \left(\frac{dy_1}{dx_1}\right)_{t=-\frac{1}{\sqrt{3}}+\varepsilon} > o$$

ein Minimum.

3. Fall: $k^2 > \frac{3}{4}$.

Es folgt aus den früheren Ergebnissen, daß die Gerade (23) die Kurve (22) im Intervalle $-1 < t < o$ höchstens dreimal schneiden kann. In diesem letzten Falle wollen wir die Bezeichnung so wählen, daß die Wurzeln t_1, t_2, t_3 der Relation $-1 < t_3 < t_2 < t_1 < o$ genügen. Sind insbesondere zwei Wurzeln t_2 und t_λ ($\lambda = 1$ oder $\lambda = 3$) gleich, so bezeichnen wir ihren gemeinsamen Wert mit $t_{2\lambda} = t_2 = t_\lambda$. Der entsprechende Schnitt μ sei $\mu_{2\lambda}$ und die andere Wurzel sei $\bar{t}_\nu$ ($\nu \neq \lambda$, $\nu = 1$ oder $\nu = 3$). [Es sei bemerkt, daß hier der Fall $t_1 = t_3$ nicht eintreten kann, weil dann auch $t_2 = t_1 = t_3 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ wäre, was nur bei $k^2 = \frac{3}{4}$ stattfinden kann].

Sind t_λ und t_ν irgend zwei Schnittpunkte der Geraden $r = \frac{1}{k\mu} t + \frac{1}{k^2}$ mit der Kurve $r = (1 - t^2)^2$, so können wir $\frac{1}{k\mu}$ und $\frac{1}{k^2}$ durch t_λ und t_ν ausdrücken, wie folgt:

$$(25) \quad \begin{cases} \frac{1}{k\mu} = -(t_\lambda + t_\nu)(2 - t_\lambda^2 - t_\nu^2) \\ \frac{1}{k^2} = 1 + t_\lambda t_\nu (2 - t_\lambda^2 - t_\nu^2 - t_\lambda t_\nu) \end{cases} \quad \begin{matrix} (\lambda \neq \nu, \lambda = 1,2,3) \\ \nu = 1,2,3) \end{matrix}$$

Die Gleichung der Geraden lautet mithin:

$$(26)\quad r = -(t_\lambda + t_\nu)(2 - t_\lambda^2 - t_\nu^2)\,t + 1 + t_\lambda t_\nu (2 - t_\lambda^2 - t_\nu^2 - t_\lambda t_\nu).$$

Ist insbesondere $\nu = 2$ und $t_\lambda = t_2 = t_{2\lambda}$, so wird:

$$\frac{1}{k\mu_{2\lambda}} = -4\,t_{2\lambda}(1 - t_{2\lambda}^2),\quad \frac{1}{k^2} = 1 + t_{2\lambda}^2(2 - 3\,t_{2\lambda}^2) = 1 + 2\,t_{2\lambda}^2 - 3\,t_{2\lambda}^4$$

Die Gerade geht in die Kurventangente über:

$$(26')\qquad r = -4\,t_{2\lambda}(1 - t_{2\lambda}^2)\,t + 1 + 2\,t_{2\lambda}^2 - 3\,t_{2\lambda}^4.$$

Aus der 2. Gleichung in (25′) folgt:

$$(27)\qquad t_{2\lambda} = -\sqrt{\frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} - \frac{1}{3\,k^2}}}$$

Setzen wir diesen Wert von $t_{2\lambda}$ in die 1. Gl. (25′) ein, so erhalten wir $\mu_{2\lambda}$, ausgedrückt durch k. Indem wir berücksichtigen, daß $t_{12} > t_{23}$ ist, erhalten wir aus der Gl. (27):

$$(28)\quad t_{12} = -\sqrt{\frac{1}{3} - \sqrt{\frac{4}{9} - \frac{1}{3\,k^2}}},\quad t_{23} = -\sqrt{\frac{1}{3} + \sqrt{\frac{4}{9} - \frac{1}{3\,k^2}}}$$

Da k im Intervalle $\frac{3}{4} < k^2 < 1$ bleibt, so haben t_{12} und t_{23} die Bereiche:

$$(29)\qquad -\frac{1}{\sqrt{3}} < t_{12} < 0,\quad -\sqrt{\frac{2}{3}} < t_{23} < -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Nun ist $t_{\lambda 2}$ eine Doppelwurzel der Gl. (21′), wenn wir in ihr die durch die Gl-en (25′) bestimmten Werte von k und $\mu_{2\lambda}$ einsetzen.

Die Gl. (21) kann daher in der Form geschrieben werden:

$$(t - t_{2\lambda}^2)^2 (t^2 + 2\, t_{2\lambda}\, t + 3\, t_{2\lambda}^2 - 2) = o$$

Daraus folgt:

(30) $\bar{t}_\nu = -t_{2\lambda} - \sqrt{2 - 2\, t_{2\lambda}^2}$, $t_4 = -t_{2\lambda} + \sqrt{2 - 2\, t_{2\lambda}^2} > o$,

wobei $\nu \neq \lambda$, $\nu = 1$ oder $\nu = 3$ ist.

Wir wollen nun die Frage beantworten: Wann bleibt die Wurzel $\bar{t}_\nu$ im Intervalle $-1 < t < o$? Von der dazu nötigen Bedingung

(31′) $$-1 < -t_{2\lambda} - \sqrt{2 - 2\, t_{2\lambda}^2} < o$$

folgt die Beziehung:

(31) $$-\sqrt{\frac{2}{3}} < t_{2\lambda} < -\frac{1}{3}$$

Wegen der Gl-en (29), (30) und (31) haben wir folgendes Ergebnis: Wenn die Doppelwurzel t_{23} ist, dann bleibt die erste Wurzel $\bar{t}_1$ stets im Intervall $-\frac{1}{\sqrt{3}} < \bar{t}_1 < o$; wenn die Doppelwurzel t_{12} ist, dann müssen wir 2 Fälle unterscheiden: α) t_{12} liegt im Intervalle $-\frac{1}{\sqrt{3}} < t_{12} < -\frac{1}{3}$; dann muß $\bar{t}_3$ im Intervalle $-1 < \bar{t}_3 < -\frac{1}{\sqrt{3}}$ und k^2 nach der 2. Gl. in (25′) im Bereiche $\frac{27}{32} < k^2 < 1$ gelegen sein; β) t_{12} liegt im Intervalle $-\frac{1}{3} < t_{12} < o$; dann liegt $\bar{t}_3$ außerhalb des Intervalls $-1 < t < o$ und k^2 muß im Bereich $\frac{3}{4} < k^2 < \frac{27}{32}$ bleiben. Dasselbe Resultat kann man direkt aus der graphischen Darstellung gewinnen.

$$\alpha) \quad \frac{3}{4} < k^2 < \frac{27}{32}.$$

a) Drehen wir die Gerade $r = \frac{1}{k\mu} t + \frac{1}{k^2}$ um den Punkt $\left(t = o, r = \frac{1}{k^2}\right)$ in derselben Weise, wie in den vorigen Fällen, so schneidet sie die Kurve $r = (1 - t^2)^2$ zunächst jedesmal in einem Punkte t_1 des Intervalls $\bar{t}_1 < t_1 < o$, solange $o < \mu_1 < \mu_{23}$ bleibt. Vergleichen wir die Gl-en (28) mit der Gl. (24), so sehen wir, daß $\left(\frac{d^2 y_1}{dx_1^2}\right)_{z=o}$ nur für die Werte $t = t_{12}$ und $t = t_{23}$ verschwindet. Wegen der Beziehung $t_{23} < t_{12} < \bar{t}_1 < t_1 < o$ bleibt $\left(\frac{d^2 y_1}{dx_1^2}\right)_{z=o} > o$ für t_1.

Ergebnis: Jedem k des Intervalls $\frac{3}{4} < k^2 < \frac{27}{32}$ entspricht ein Intervall für μ: $o < \mu < \mu_{23} < k$ so, daß jedem Schnitte μ_1 dieses Intervalls ein t_1 des Intervalls $\bar{t}_1 < t_1 < o$ zukommt, in dem das y_1 des Schnittes μ_1 ein Minimum wird. Wächst x_1 von $-\infty$ bis $(x_1)_{t_1}$, so nimmt y_1 von $+\infty$ bis $(y_1)_{t_1}$ ab; wächst x_1 von $(x_1)_{t_1}$ bis $+\infty$ weiter, so nimmt y_1 von $(y_1)_{t_1}$ bis $+\infty$ zu. Die Kurve ist inbezug auf die x-Achse als Hauptachse (Abszissenachse) positiv gekrümmt.

b) In der Lage, die dem Werte $\mu = \mu_{23}$ entspricht, hat die Gerade mit der Kurve einen Schnittpunkt $\bar{t}_1$ und einen Berührungspunkt t_{23} gemeinsam. $t_2 = t_3 = t_{23}$ ist eine Doppelwurzel der ersten Ableitung $\frac{dy_1}{dx_1}$, folglich eine einfache der zweiten Ableitung $\frac{d^2 y_1}{dx_1^2}$; an dieser Stelle hat der Schnitt μ_{23} einen Wendepunkt, in dem die Krümmung von der positiven in die negative übergeht, wie durch die 1. Ableitung leicht festgestellt werden kann. Für t_1 bleibt $\left(\frac{d^2 y_1}{dx_1^2}\right)_{z=o} > o$, folg-

lich ist hier für y_1 ein Minimum vorhanden. Das Ergebnis kann man ähnlich aussprechen wie in (a).

c) Dreht man die Gerade weiter in demselben Sinne, so wird die Kurve von ihr in drei Punkten t_1, t_2 und t_3 des Intervalls $-1 < t < o$ geschnitten, solange μ im Intervalle $\mu_{23} < \mu < \mu_{12}$ bleibt.

Es ist: $-1 < t_3 < t_{23} < t_2 < t_{12} < t_1 < o$.

Nach (24) ist $\left(\frac{d^2 y_1}{dx_1^2}\right)_{z=o}$ positiv für t_3, negativ für t_2 und wieder positiv für t_1. Jeder Schnitt μ des Intervalls $\mu_{23} < \mu < \mu_{12}$ besitzt somit der Reihe nach eine Minimal-, eine Maximal-, und wieder eine Minimalstelle.

d) In der Lage, die dem Werte μ_{12} entspricht, hat die Gerade mit der Kurve einen Berührungspunkt t_{12} und einen Schnittpunkt $\bar{t}_3$ gemeinsam. Da $\bar{t}_3 < t_{23}$ ist, so bleibt $\left(\frac{d^2 y_1}{dx_1^2}\right)_{z=o} > o$ für $\bar{t}_3$; hier ist für y_1 ein Minimum vorhanden. Für t_{12} verschwindet die erste Ableitung in 2. Ordnung, folglich ist t_{12} ein Wendepunkt. Mit Hilfe der 1. Ableitung kann leicht festgestellt werden, daß dort die Krümmung von der negativen in die positive übergeht.

e) Bei weiterer Drehung schneidet die Gerade die Kurve nur in einem Punkte t_3 des Intervalls $-1 < t_3 < \bar{t}_3$, solange $\mu_{12} < \mu < k$ bleibt. An der Stelle t_3 hat y_1 wegen der Ungleichung $\left(\frac{d^2 y_1}{dx_1^2}\right)_{z=o} > o$ für t_3 ein Minimum.

f) Die Kurve wird von der Geraden, wenn wir diese in demselben Sinne weiter drehen, im Intervalle $-1 < t < o$ nicht mehr getroffen; μ durchläuft das Intervall $k < \mu < \infty$; das y_1 dieser Schnitte hat keinen Extremwert, wohl aber x_1, wie früher gezeigt wurde.

$$\beta) \quad \frac{27}{32} < k^2 < 1.$$

Die Unterfälle (a) und (b) des vorigen Falles (α) sind auch hier gültig. Die Gerade hat mit der Kurve drei Schnittpunkte t_1, t_2 und t_3 gemeinsam im Intervalle $-1 < t < o$, wenn μ im Bereiche $\mu_{23} < \mu < k$ bleibt. Das Weitere ist genau so, wie im (c) des vorigen Falles (α). Bleibt μ im Intervalle $k < \mu < \mu_{12}$, so schneidet die Gerade die Kurve in zwei Punkten t_1 und t_2 des Intervalls $-1 < t < o$. Da $t_{23} < t_2 < t_{12} < t_1$ ist, so ist $\left(\frac{d^2 y_1}{dx_1^2}\right)_{z=o}$ negativ für t_2 und positiv für t_1. Jeder Schnitt μ des genannten Intervalles besitzt ein Maximum und ein Minimum für y_1. Dieselben Schnitte besitzen Minimalstellen $t = -\frac{k}{\mu}$ für x_1, wie sich früher ergeben hat. Der Schnitt $\mu = \mu_{12}$ hat an der Stelle $t_1 = t_2 = t_{12}$ einen Wendepunkt, in dem die Krümmung von der negativen in die positive übergeht. Die Stelle $t = -\frac{k}{\mu_{12}}$ ist ein Minimum für das x_1 desselben Schnittes. Die Schnitte $\mu_{12} < \mu < \infty$ besitzen keine Extremstellen für y_1, wohl aber für x_1, wie früher festgestellt wurde.

Schließlich sei noch bemerkt, daß die Extremwerte von y_1 der Schnitte $\mu < o$ denjenigen der Schnitte $\mu > o$ entsprechend gleich und mit ihnen gleichartig sind: $\left(y_1\right)_{-\mu_1,-t_1} = \left(y_1\right)_{\mu_1,t_1}$, während die Extremwerte von x_1 entgegengesetzt gleich und ungleichartig sind: $\left(x_1\right)_{-\mu_1,-t_1} = -\left(x_1\right)_{\mu_1,t_1}$.

d) Biegungskurven der zweiten Schar von Geraden des Hyperboloids.

Im § 2 haben wir die Gleichung der zweiten Schar von Geraden des Hyperboloids (2) im § 1 aufgestellt; sie lautete:

$$\frac{1}{u} + v = \text{konst.} \tag{32}$$

Da für die Biegungsfläche des Hyperboloids statt v ein neuer Parameter ψ durch die Beziehung

$$v = \frac{1}{\sqrt{k'}\,\mathrm{tg}\,\psi} \tag{33}$$

eingeführt worden ist, so wollen wir diesen Wert von v in die Gl. (32) einsetzen.

Es wird:

$$u = \frac{\sqrt{k'}\sin\psi}{C\sin\psi - \cos\psi} \tag{34}$$

Die rechtwinkligen Koordinaten der Biegungskurven der 2. Schar von Geraden des Hyperboloids erhalten wir, indem wir aus der Gl. (34) den Wert von u in die Gleichungen der verbogenen Fläche (11) einsetzen. Sie lauten:

$$x_1 = \sqrt{c^2 - a^2}\left\{\Delta\psi \cdot \frac{C\cos\psi + \sin\psi}{C\sin\psi - \cos\psi} - F(k,\psi) + E(k,\psi) + K - E\right\}$$

$$y_1 = \frac{k}{k'}\sqrt{c^2 - a^2}\left\{\Delta\psi\,\frac{C}{C\sin\psi - \cos\psi} - k'\right\},$$

$$z_1 = k\sqrt{c^2 - a^2}\cdot\frac{1}{C\sin\psi - \cos\psi}$$

Die ersten Ableitungen sind:

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{dx_1}{d\psi} &= -\sqrt{c^2 - a^2}\cdot\frac{C^2 - C\,k^2\cos\psi\sin\psi + \Delta^2\psi}{\Delta\psi\,(C\sin\psi - \cos\psi)^2}\\
\frac{dy_1}{d\psi} &= -\frac{C\,k}{k'}\sqrt{c^2 - a^2}\cdot\frac{C\cos\psi + k'^2\sin\psi}{\Delta\psi\,(C\sin\psi - \cos\psi)^2}\\
\frac{dz_1}{d\psi} &= -\,k\sqrt{c^2 - a^2}\cdot\frac{C\cos\psi + \sin\psi}{(C\sin\psi - \cos\psi)^2}.
\end{aligned}\right. \tag{36}$$

Aus den Gl-en (35) und (36) können wir mit Zuhilfenahme der 2. Ableitungen die Gestalt der Projektionen dieser Biegungskurven (eine Schar von virtuellen Asymp-

totenlinien auf der verbogenen Fläche), folglich auch ihre Gestalt bestimmen. Wir wollen jedoch nur 2 spezielle Fälle betrachten, die von besonderem Interesse sind.

1) $C = \infty$: Aus der Gl. (34) folgt: $u = o$; diesen Fall haben wir bereits untersucht.

2) $C = o$: Aus der Gl. (32) folgt: $u = -\frac{1}{v}$, und aus der Gl. (34): $u = -\sqrt{k'}\,\mathrm{tg}\,\psi$.

Diese Gerade des Hyperboloids hat die rechtwinkligen Koordinaten:

$$x = -a\,u,\quad y = -b,\quad z = c\,u \text{ oder } x = -\frac{a}{c}z,\quad y = b.$$

Sie liegt also in der zur xz-Ebene im Abstande $-b$ parallel laufenden Ebene und geht durch den Scheitel der kleinen Achse der Kehllellipse. Ihre xz-Projektion ist die eine Asymptote des Schnittes $y = o$ des Hyperboloids, während die andere Asymptote desselben Schnittes die xz-Projektion der Geraden $u = o$ ist. Die Biegungskurve dieser Geraden erhält man, indem man in den Gl-en (35) $C = o$ setzt:

$$(37)\quad \begin{cases} x_1 = \sqrt{c^2 - a^2}\,\{-\Lambda\psi\,\mathrm{tg}\,\psi - F(k,\psi) + E(k,\psi) + K - E\} \\ y_1 = -k\sqrt{c^2 - a^2} = -2b, \\ z_1 = -\dfrac{k\sqrt{c^2 - a^2}}{\cos\psi} \end{cases}$$

Es stellt sich somit folgendes Resultat heraus: Verbiegt man das Hyperboloid (2) im § 1 derart, daß die Gerade $u = o$ der 2. Schar in eine ebene Geodätische übergeht, so ist im Falle $A = 1$ die Biegungskurve der Geraden $u = -\frac{1}{v}$ derselben Schar ebenfalls eine ebene Kurve.

Die Gl-en (36) liefern für $C = o$:

$$(38)\quad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{d\psi} = -\sqrt{c^2 - a^2}\,\dfrac{\Lambda\psi}{\cos^2\psi}, \qquad \dfrac{dy_1}{d\psi} = o, \\ \dfrac{dz_1}{d\psi} = -k\sqrt{c^2 - a^2}\cdot\dfrac{\sin\psi}{\cos^2\psi},\quad \dfrac{dx_1}{dz_1} = \dfrac{1}{k}\,\dfrac{\Lambda\psi}{\sin\psi}. \end{cases}$$

Wir bilden noch die 2. Ableitungen:

$$(39)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2 x_1}{dz_1^2} = \dfrac{1}{k^2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{c^2 - a^2}} \cdot \dfrac{\operatorname{cotg}^3 \psi}{\Delta^3 \psi}, \\ \dfrac{d^2 z_1}{dx_1^2} = -\dfrac{k}{\sqrt{c^2 - a^2}} \cdot \dfrac{\cos^3 \psi}{\Delta^4 \psi}. \end{cases}$$

Gültigkeitsbereich für ψ: $0 \leqq \psi \leqq \pi$.

Die Gleichungen (37), (38) und (39) bestimmen die Gestalt der Kurve (37): $\dfrac{dx_1}{d\psi}$ und $\dfrac{dy_1}{d\psi}$ bleiben stets negativ und endlich; die einzige Unendlichkeitsstelle ist $\psi = \dfrac{\pi}{2}$. Daraus folgt, daß z_1 und x_1 mit zunehmendem ψ abnehmen, mithin wächst x_1 mit zunehmendem z_1. Durchläuft ψ das Intervall: $\dfrac{\pi}{2} \leqq \psi \leqq \pi$, so wachsen z_1 und x_1 von ihren Grenzminima: $(z_1)_{min} = k\sqrt{c^2 - a^2} = 2b, (x_1)_{min} = -\sqrt{c^2 - a^2}$ (K — E) bis zu den Werten $z_1 = +\infty$, $x_1 = +\infty$, während $\dfrac{dx_1}{dz_1}$ von $+\infty$ bis $\dfrac{k'}{k}$ abnimmt und $\dfrac{d^2 x_1}{dz_1^2}$ von $-\infty$ bis 0 wächst. Im Punkte $z_1 = +\infty$, $x_1 = +\infty$ besitzt die Kurve die Asymptote: $x_1 = \dfrac{k'}{k} z_1$. Diese Gleichung ist aus der Gleichung $x_1 = m z_1 + h$ entstanden, wobei $m = \lim\limits_{\psi = \frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{dx_1}{dz_1}\right) = \dfrac{k'}{k}$ und

$$h = \lim_{\psi = \frac{\pi}{2}} (x_1 - m z_1) = \sqrt{c^2 - a^2} \left(-\Delta \psi \operatorname{tg} \psi + \frac{k'}{\cos \psi} \right)_{\psi = \frac{\pi}{2}} = 0$$

ist. Die Kurve wendet der x_1-Achse ihre konvexe Seite zu. Ersetzt man $\pi - \psi$ durch ψ, so ändern z_1 und x_1 ihr Vorzeichen; mithin hat der dem Bereich $0 \leqq \psi \leqq \dfrac{\pi}{2}$ entsprechende Kurvenzweig in bezug auf die $(-z_1)$- und $(-x_1)$-Achsen dieselbe Lage, wie der 1. Zweig in bezug auf die $+z_1$- und

$+ x_1$-Achsen. Die Zweige sind also kongruent, und zwar können sie zur Deckung gebracht werden durch Drehung um den Ursprung des Koordinatensystems.

Die Kurve (37) ist zugleich der Ort aller Punkte der Parallelschnitte $\mu = \text{konst.}$, in denen x_1 einen Extremwert erreicht Dies ergibt sich leicht, wenn wir aus der Gl. (15) die Bedingung des Extremums für x_1: $\mu = -\frac{k}{\cos\psi}$ in die Gl-en (12) einsetzen; dann bekommen wir genau die Gl-en (37).

e) Wir bestimmen noch die Lage der Geraden $v = o$ und $v = \pm\infty$ auf dem Hyperboloid und auf der Biegungsfläche.

1) $v = o$, also nach (33) ist $\psi = \frac{\pi}{2}$.

Aus den Gl-en (2) bekommt man durch den Ansatz $v = o$:

$$x = -au,\ y = b,\ z = cu.$$

Aus den Gl-en (11) ergibt sich für $\psi = \frac{\pi}{2}$:

$$x_1 = k'\sqrt{c^2 + a^2}\cdot u,\ y_1 = o,\ z_1 = k\sqrt{c^2 + a^2}\,u.$$

Wir sehen, daß, während die Geraden $u = -\frac{1}{v}$ und $v = o$ auf dem Hyperboloid (2) bezw. in den Ebenen $y = -b$ und $y = b$ liegen, sich ihre Biegungskurven bezw. in den Ebenen: $y_1 = -2b$ und $y_1 = o$ befinden.

2) $v = +\infty$ $(\psi = o)$, $v = -\infty$ $(\psi = \pi)$.

Die Parameterdarstellung (2) im § 1 versagt in diesen Fällen; berücksichtigen wir aber, daß v dem Bogen der Linie $u = o$ proportional ist, so ergibt sich leicht, daß den Werten $v = +\infty$ und $v = -\infty$ eine doppelt zu zählende Gerade des Hyperboloids entspricht, die die Gerade $u = o$ erst im Unendlichen schneidet. Ihre Gleichungen in rechtwinkligen Koordinaten lauten: $x = \frac{a}{c}z,\ y = -b$.

Um die Lage der Geraden $\psi = o$ und $\psi = \pi$ auf der Biegungsfläche zu bestimmen, können wir ihre Schnittpunkte

mit den Ebenen $y_1 = o$ und $y_1 = -2b$ zu Hilfe nehmen. Für $y_1 = -k\sqrt{c^2 - a^2} = -2b$ erhält man aus der 2. Gl. in (11): $u = -\sqrt{k'}\,\mathrm{tg}\,\psi$. Dieser Wert von u führt aber auf die Kurve (37). Setzen wir hierin $\psi = o$ und $\psi = \pi$, so erhalten wir:

$$(38)\left(\bar{x}_1\right)_{\psi=o} = \sqrt{c^2 - a^2}\,(K - E), \left(\bar{y}_1\right)_{\psi=o} = -k\sqrt{c^2 - a^2},$$

$$\left(\bar{z}_1\right)_{\psi=o} = -k\sqrt{c^2 - a^2}$$

$$\left(\bar{x}_1\right)_{\psi=\pi} = -\sqrt{c^2 - a^2}\,(K - E), \left(\bar{y}_1\right)_{\psi=\pi} = -k\sqrt{c^2 - a^2},$$

$$\left(\bar{z}_1\right)_{\psi=\pi} = k\sqrt{c^2 - a^2}.$$

Für $y_1 = o$ ergibt sich aus der 2. Gl. in (11):

$$u = -\sqrt{k'} \cdot \frac{\Delta\psi - k' \sin\psi}{\Delta\psi \cos\psi} \sin\psi.$$

Die Gl-en (11) lauten jetzt:

$$x_1 = \sqrt{c^2 - a^2}\left\{\frac{k' - \Delta\psi \sin\psi}{\cos\psi} + K - E - F(k,\psi) + E(k,\psi)\right\}$$

$$y_1 = o,\quad z_1 = -k\sqrt{c^2 - a^2} \cdot \frac{\Delta\psi - k' \sin\psi}{\Delta\psi \cos\psi}.$$

Hieraus folgt zunächst, daß u für $\psi = \frac{\pi}{2}$, und nur für diesen Wert, die unbestimmte Form $u = \frac{o}{o}$ annimmt; dies deutet darauf hin, daß u für $\psi = \frac{\pi}{2}$ jeden Wert annehmen kann, d. h. die Gerade $\psi = \frac{\pi}{2}$ in der Ebene $y_1 = o$ liegt, und das haben wir früher festgestellt.

Die letzten Gleichungen liefern:

$$(39)\quad \begin{cases} \left(\bar{\bar{x}}_1\right)_{\psi=0} = \sqrt{c^2-a^2}\,(k'+K-E), \\ \left(\bar{y}_1\right)_{\psi=0} = 0, \left(\bar{\bar{z}}_1\right)_{\psi=0} = -k\sqrt{c^2-a^2} \\ \left(\bar{\bar{x}}_1\right)_{\psi=\pi} = -\sqrt{c^2-a^2}\,(k'+K-E), \\ \left(\bar{\bar{y}}_1\right)_{\psi=\pi} = 0, \left(\bar{\bar{z}}_1\right)_{\psi=\pi} = k\sqrt{c^2-a^2}. \end{cases}$$

Nun seien $(x_1)_{\psi=0}$, $(y_1)_{\psi=0}$, $(z_1)_{\psi=0}$ die laufenden Koordinaten von $\psi = 0$; dann folgt aus den Gl-en (38) und (39):

$$\left(\frac{y_1-\bar{y}_1}{x_1-\bar{x}_1}\right)_{\psi=0} = \left(\frac{\bar{\bar{y}}_1-\bar{y}_1}{\bar{\bar{x}}_1-\bar{x}_1}\right)_{\psi=0} = \frac{k}{k'}.$$

Man kann also setzen:

$$\left(y_1-\bar{y}_1\right)_{\psi=0} = \frac{k}{k'}\sqrt{c^2-a^2}\;U, \quad \left(x_1-\bar{x}_1\right)_{\psi=0} = \sqrt{c^2-a^2}\;U,$$

woraus folgt:

$$(40)\quad \begin{cases} \left(x_1\right)_{\psi=0} = \sqrt{c^2-a^2}\,(U+K-E), \\ \left(y_1\right)_{\psi=0} = \frac{k}{k'}\sqrt{c^2-a^2}\,(U-k'). \end{cases}$$

Genau ebenso findet man:

$$(41)\quad \begin{cases} \left(x_1\right)_{\psi=\pi} = \sqrt{c^2-a^2}\,(U_1-K+E), \\ \left(y_1\right)_{\psi=\pi} = -\frac{k}{k'}\sqrt{c^2-a^2}\,(U_1+k'). \end{cases}$$

Ein Vergleich zeigt, daß die Gl-en (40) mit den Gl-en (16) und die Gl-en (41) mit den Gl-en (17) genau übereinstimmen. Wir haben somit die Richtigkeit der dort gefundenen Gleichungen bestätigt.

Als unmittelbares Ergebnis der vorigen Entwicklungen ergibt sich folgendes: Das Hyperboloid (2) im § 1 muß längs der Doppelgeraden $v = \pm\infty$ geschnitten werden, um seine Verbiegung auf die Fläche (11) zu bewerkstelligen.

2) $A = 2$.

a) Integration der Gleichungen der verbogenen Direktrix $u = o$.

Die Gl-en (16) im § 1 lauten in diesem Falle:

$$(42)\quad \begin{cases} k = \dfrac{a\,c}{\sqrt{a^2 c^2 + (c^2 - a^2)^2}},\ b = k\sqrt{c^2 - a^2},\ B = \dfrac{a\,c\,k}{\sqrt{c^2 - a^2}}, \\ k' = \dfrac{c^2 - a^2}{\sqrt{a^2 c^2 + (c^2 - a^2)^2}} \end{cases}$$

Die Gleichungen der verbogenen Direktrix $u = o$, (17) im § 1, lauten jetzt:

$$(43)\quad \begin{cases} x = \displaystyle\int_o^s \cos\left(2 \operatorname{arc\,tg} \frac{Bs}{\sqrt{b^2 s^2 + a^2 c^2}}\right) ds, \\ y = \displaystyle\int_o^s \sin\left(2 \operatorname{arc\,tg} \frac{Bs}{\sqrt{b^2 s^2 + a^2 c^2}}\right) ds,\ z = o. \end{cases}$$

Die Integration kann durch den Ansatz

$$(44)\qquad s = \sqrt{c^2 - a^2}\,\operatorname{tg} t,\ ds = \sqrt{c^2 - a^2}\,\frac{dt}{\cos^2 t}$$

geleistet werden. Es wird dann:

$$\frac{Bs}{\sqrt{b^2 s^2 + a^2 c^2}} = \frac{k \sin t}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}},$$

$$\cos \operatorname{arc\,tg} \frac{Bs}{\sqrt{b^2 s^2 + a^2 c^2}} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t},$$

$$\sin \operatorname{arc\,tg} \frac{Bs}{\sqrt{b^2 s^2 + a^2 c^2}} = k \sin t$$

Die Gl-en (43) gehen in folgende über:

$$(45)\quad \begin{cases} x = \sqrt{c^2 - a^2}\int_0^t (1 - 2\,k^2 \sin^2 t)\,\dfrac{dt}{\cos^2 t} \\ \quad = \sqrt{c^2 - a^2}\,\{(1 - 2\,k^2)\,\mathrm{tg}\,t + 2\,k^2 t\} \\ y = 2\,k\,\sqrt{c^2 - a^2}\int_0^t \dfrac{\sin t\,\Delta t\,dt}{\cos^2 t} \\ \quad = 2k\sqrt{c^2 - a^2}\left\{\dfrac{\Delta t}{\cos t} - k\ln(k\cos t + \Delta t) + k\ln(k+1) - 1\right\} \end{cases}$$

Gültigkeitsbereich für t: $-\frac{\pi}{2} \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}$.

Für die Gestalt der Kurve sind außer den Gl. (45) folgende Ableitungen maßgebend:

$$(46)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sqrt{c^2 - a^2} \cdot \dfrac{1 - 2\,k^2 \sin^2 t}{\cos^2 t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2\,k\,\sqrt{c^2 - a^2} \cdot \dfrac{\sin t\,\Delta t}{\cos^2 t}, \quad \dfrac{dy}{dx} = 2\,k\,\dfrac{\sin t\,\Delta t}{1 - 2\,k^2 \sin^2 t} \\ \dfrac{d^2 y_1}{dx_1^{\,2}} = \dfrac{2\,k}{\sqrt{c^2 - a^2}} \cdot \dfrac{\cos^3 t}{\Delta t\,(1 - 2\,k^2 \sin^2 t)^3}, \\ \dfrac{d^2 x_1}{dy_1^{\,2}} = -\dfrac{1}{4\,k^2\sqrt{c^2 - a^2}} \cdot \dfrac{\mathrm{cotg}^3 t}{\Delta^4 t} \end{cases}$$

Es genügt, wenn wir die Kurve im Bereich $0 \leqq t \leqq \pi/2$ betrachten; berücksichtigen wir nämlich, daß $(x)_{-t} = -(x)_t$, $(y)_{-t} = (y)_t$ ist, so ergibt sich, daß der Kurvenzweig im Bereiche $-\pi/2 \leqq t \leqq 0$ zu dem im ersten inbezug auf die y-Achse symmetrisch liegt. Wir müssen offenbar zwei Intervalle für k unterscheiden:

1) $k^2 < \frac{1}{2}$.

Durchläuft t das Intervall $o < t < \pi/2$, so bleiben $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ stets positiv, dabei wächst x von $x = o$ bis $x = \infty$ und y von $y_{min} = o$ bis $y = \infty$. $\frac{dy}{dx}$ wächst von Null an und strebt der Grenzlage $\frac{2kk'}{1-2k^2}$ zu. Die Kurventangente wird zur Asymptote; die Gleichung derselben lautet: (47) $y = \frac{2kk'}{1-2k^2}x + 2k^2\sqrt{c^2-a^2}\left\{k \ln (k+1) - 1 - k \ln k' - \frac{k'k^2}{1-2k^2}\pi\right\}$. Der Kurvenzweig wendet der x-Achse seine konvexe Seite zu.

2) $k^2 > \frac{1}{2}$.

Hier existiert ein t_1, für das $1 - 2k^2 \sin^2 t_1 = o$ wird: $t_1 = \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2k}\right)$. Wächst t von o bis t_1, so nimmt x von o bis $(x)_{t_1}$ zu, y wächst von o bis $(y)_{t_1}$, $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ wächst von o bis ∞ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ bleibt positiv. Wächst t weiter bis $\pi/2$, so nimmt x von seinem Maximalwerte $x_{max} = (x)_{t_1}$ bis $x = -\infty$ ab, y wächst weiter von $(y)_{t_1}$ bis $+\infty$; $\frac{dy}{dx}$ wächst von $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t_1} = -\infty$ an und strebt der Grenzlage $\frac{2kk'}{1-2k^2}$ zu, die dem Wert $t = \pi/2$ entspricht. Die Asymptote ist wieder durch die Gl. (47) bestimmt. $\frac{d^2y}{dx^2}$ wird für diesen Teil des Intervalls (für t) negativ. Der Kurvenzweig ist mithin vom Anfangspunkte bis zu dem Punkte $[(x)_{t_1}, (y)_{t_1}]$ bezüglich der

x-Achse positiv und in den Punkten des Bereiches $t < t_1 < \pi/2$ negativ gekrümmt. Die symmetrischen Kurvenzweige schneiden sich in diesem Falle (auf der y-Achse).

b) Parameterdarstellung der verbogenen Fläche.

Unter Berücksichtigung der Gl-en (44) und (46) erhält man:

$$\alpha = \frac{dx}{ds} = 1 - 2k^2 \sin^2\psi,\ \beta = \frac{dy}{ds} = 2k \sin t\, \Delta t,\ \gamma = 0;$$

$$\lambda = 0,\ \mu = 0,\ \nu = 1.$$

Nehmen wir noch die Gl-en (7) und (8) im § 1 hinzu, so wird:

$$p = \frac{c^2 - a^2}{\sqrt{c^2 + a^2}} \cdot \frac{1}{\cos^2 t},\ q = \frac{2ac}{\sqrt{c^2 + a^2}} \cdot \frac{\Delta t}{\cos t}$$

Die Gleichungen der verbogenen Fläche (3) im § 1 lauten mithin:

$$(48)\quad \begin{cases} x_1 = x + u \cdot \dfrac{c^2 - a^2}{\sqrt{c^2 + a^2}} \cdot \dfrac{1 - 2k^2 \sin^2 t}{\cos^2 t} \\ y_1 = y + u \cdot \dfrac{c^2 - a^2}{\sqrt{c^2 + a^2}} \cdot \dfrac{2k \sin t\, \Delta t}{\cos^2 t} \\ z_1 = + u \cdot \dfrac{2ac}{\sqrt{c^2 + a^2}} \cdot \dfrac{\Delta t}{\cos t} \end{cases}$$

x und y haben dabei die in den Gl-en (45) angegebenen Werte.

Gültigkeitsbereich für t: $-\frac{\pi}{2} < t < +\frac{\pi}{2}$.

Wir könnten durch ähnliches Verfahren, wie im Falle $A = 1$, die Gleichungen der Schnitte $z_1 = \text{konst.}$ und die der Biegungskurve der Geraden des Hyperboloids aufstellen; weil sie aber schwer diskutabel sind, so gehen wir nicht darauf ein.

c) Die Lage der Geraden $v = \pm\infty$ auf der Biegungsfläche.

Aus den Gl-en (6) im § 1 und (44) ergibt sich:

$$v = \sqrt{\frac{c^2 - a^2}{c^2 + a^2}}\,\mathrm{tg}\,t.$$

Setzen wir $t = o$ in (48) ein, so stellt sich heraus, daß, während die Gerade $v = o\,(t = o)$ auf dem Hyperboloid in der Ebene $y = b$ liegt, sie auf der Fläche (48) in der Ebene $y_1 = o$ bleibt.

Die Lage der Doppelgeraden $v = \pm\infty\left(t = \pm\frac{\pi}{2}\right)$ auf der verbogenen Fläche (48) kann durch die Schnittpunkte dieser Geraden mit den Ebenen $y_1 = \text{konst.}$ festgestellt werden.

Setzen wir in der 2. Gl. (48) $y_1 = 2k\sqrt{c^2 - a^2}\,[k\ln(k+1) - 1]$, so wird:

$$u = \frac{\sqrt{c^2 + a^2}}{\sqrt{c^2 - a^2}}\,\mathrm{cotg}\,t \cdot \frac{k\cos t \ln(k\cos t + \Delta t) - \Delta t}{\Delta t}$$

$$x_1 = \sqrt{c^2 - a^2}\left\{2k^2 t + \frac{(1 - 2k^2\sin^2 t)k\ln(k\cos t + \Delta t) - \cos t\,\Delta t}{\sin t\,\Delta t}\right\}$$

$$z_1 = \frac{2ac}{\sqrt{c^2 - a^2}} \cdot \frac{k\cos t \ln(k\cos t + \Delta t) - \Delta t}{\sin t}$$

Daraus folgt:

$$(\bar{x}_1)_{t=\frac{\pi}{2}} = \sqrt{c^2 - a^2}\left\{k^2\pi + \frac{k(1 - 2k^2)\ln k'}{k'}\right\},\ (\bar{x}_1)_{t=-\frac{\pi}{2}} = -(\bar{x}_1)_{t=\frac{\pi}{2}}$$

$$\bar{y}_1 = 2k\sqrt{c^2 - a^2}\left\{k\ln(k+1) - 1\right\}$$

$$(\bar{z}_1)_{t=\frac{\pi}{2}} = -\frac{2ack'}{\sqrt{c^2 - a^2}},\ (\bar{z}_1)_{t=-\frac{\pi}{2}} = -(\bar{z}_1)_{t=\frac{\pi}{2}}$$

Setzen wir in (48) $y_1 = o$, so wird:

$$u = \frac{\sqrt{c^2+a^2}}{\sqrt{c^2-a^2}} \operatorname{cotg} t \cdot \frac{\{k \ln(k \cos t + \Delta t) - [k \ln(k+1) - 1]\} \cos t - \Delta t}{\Delta t}$$

$$x_1 = \sqrt{c^2-a^2}\left\{2k^2 t + \frac{\{k \ln(k \cos t + \Delta t) - [k \ln(k+1) - 1]\}(1 - 2k^2 \sin^2 t) - \cos t \, \Delta t}{\sin t \cdot \Delta t}\right\}$$

$$z_1 = \frac{2ac}{\sqrt{c^2-a^2}} \cdot \frac{\cos t \{k \ln(k \cos t + \Delta t) - [k \ln(k+1) - 1]\} - \Delta t}{\sin t}$$

Daraus folgt:

$$(\bar{x}_1)_{t=\frac{\pi}{2}} = \sqrt{c^2-a^2}\left\{k^2\pi + \frac{[k \ln k' - k \ln(k+1) + 1](1-2k^2)}{k'}\right\},$$

$$(\bar{x}_1)_{t=-\frac{\pi}{2}} = -(\bar{x}_1)_{t=\frac{\pi}{2}}$$

$$\bar{y}_1 = o$$

$$(\bar{z}_1)_{t=\frac{\pi}{2}} = -\frac{2ack'}{\sqrt{c^2-a^2}}, \quad (\bar{z}_1)_{-\pi/2} = -(\bar{z}_1)_{\frac{\pi}{2}}.$$

Bezeichnen wir mit x, y, z die laufenden Koordinaten und berücksichtigen, daß

$$\left(\frac{\bar{\bar{y}}_1 - \bar{y}_1}{\bar{\bar{x}}_1 - \bar{x}_1}\right)_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{2kk'}{1-2k^2}$$

ist, so ergibt sich als Gleichung der Geraden $t = \pi/2$:

$$(y - \bar{y}_1)_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{2kk'}{1-2k^2}(x - \bar{x}_1)_{t=\frac{\pi}{2}},$$

also:

$$\begin{cases} y = \dfrac{2kk'}{1-2k^2}x + 2k\sqrt{c^2-a^2}\left\{k \ln(k+1) - 1 - k \ln k' - \dfrac{k'k^2\pi}{1-2k^2}\right\}, \\ z_1 = -\dfrac{2ack'}{\sqrt{c^2-a^2}} \end{cases}$$

Die erste Gleichung stimmt mit der Gl. (47) genau überein.

Daraus folgt unmittelbar das Ergebnis:

Die Gerade $t = \frac{\pi}{2}$ liegt in der Ebene $z_1 = -\frac{2\,a\,c\,k'}{\sqrt{c^2 - a^2}}$ und besitzt die Richtungskonstante $-\frac{2\,k\,k'}{1-2\,k^2}$; ihre Projektion auf die Ebene $z_1 = o$ ist die andere Asymptote der Kurve $u = o$.

Es stellt sich zugleich heraus, daß das Hyperboloid (2) längs der Doppelgeraden $v = \pm\infty$ geschnitten werden muß, um seine Verbiegung auf die Fläche (48) zu bewerkstelligen.

3) $A = 3$.

a) Integration der Gleichungen der verbogenen Direktrix $u = o$.

Die Gl-en (16) im § 1 lauten in diesem Falle:

$$k = \frac{2\,a\,c}{\sqrt{4\,a^2\,c^2 + 9\,(c^2 - a^2)^2}},\quad k' = \frac{3\,(c^2 - a^2)}{\sqrt{4\,a^2\,c^2 + 9\,(c^2 - a^2)^2}},$$

$$b = \tfrac{3}{2}\,k\sqrt{c^2 - a^2},\quad B = \frac{a\,c\,k}{\sqrt{c^2 - a^2}}.$$

Die Gl-en (17) im § 1 der Biegungskurve gehen durch denselben Ansatz (3), der im Falle $A = 1$ gebraucht wurde, in folgende über:

$$x = -\frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{k'}\int_{\pi/2}^{\psi} \cos\left(3\,\operatorname{arc\,tg}\frac{k\cos\psi}{k'}\right)\frac{d\,\psi}{\sin^2\psi},$$

$$y = -\frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{k'}\int_{\pi/2}^{\psi} \sin\left(3\,\operatorname{arc\,tg}\frac{k\cos\psi}{k'}\right)\frac{d\,\psi}{\sin^2\psi},$$

$$z = o,$$

oder, wenn wir die Gl-en (14) im § 1 und die bekannten trigonometrischen Identitäten $\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$, $\sin 3\varphi = \sin\varphi\,(4\cos^2\varphi - 1)$ benutzen:

$$x = -\sqrt{c^2 - a^2}\left\{4k'^2 \int_{\pi/2}^{\psi} \frac{d\psi}{\sin^2\psi\,\Delta^3\psi} - 3\int_{\pi/2}^{\psi} \frac{d\psi}{\sin^2\psi\,\Delta\psi}\right\}$$

$$y = -\frac{k}{k'}\sqrt{c^2 - a^2}\left\{4k'^2 \int_{\pi/2}^{\psi} \frac{\cos\psi\,d\psi}{\sin^2\psi\,\Delta^3\psi} - \int_{\pi/2}^{\psi} \frac{\cos\psi\,d\psi}{\sin^2\psi\,\Delta\psi}\right\},$$

$$z = 0.$$

Nun ist, wenn wir die Partialbruchzerlegung anwenden:

$$\int \frac{d\psi}{\sin^2\psi\,\Delta^3\psi} = \int \frac{d\psi}{\sin^2\psi\,\Delta\psi} + k^2 \int \frac{d\psi}{\Delta^3\psi}.$$

Vermöge der bekannten Relation:[1])

$$\frac{k^2 \sin\psi\cos\psi}{\Delta^{2m-3}_{\psi}} = -(2m-5)\int \frac{d\psi}{\Delta^{2m-5}_{\psi}} + (2m-4)(2-k^2)\int \frac{d\psi}{\Delta^{2m-3}_{\psi}} - (2m-3)(1-k^2)\int \frac{d\psi}{\Delta^{2m-1}_{\psi}}$$

erhalten wir, wenn wir darin $m = 2$ setzen:

$$\int \frac{d\psi}{\Delta^3\psi} = -\frac{k^2 \sin\psi\cos\psi}{k'^2\,\Delta\psi} + \frac{1}{k'^2}\int \Delta\psi\,d\psi$$

Jetzt sind die in x vorkommenden Integrale durch Normalintegrale 1. und 2. Gattung darstellbar.

Durch den Ansatz: $k\sin\psi = \sin\varphi$ können wir die in y vorkommenden Integrationen leicht ausführen und wir erhalten als Gleichungen der rechtwinkligen Koordinaten der verbogenen Direktrix $u = o$ folgende:

$$(50)\quad \begin{cases} x = \sqrt{c^2 - a^2}\left\{(8k^2-1)[E - E(k,\psi)] + (4k^2-1)[F(k,\psi) - K - \operatorname{cotg}\psi\Delta\psi] + \dfrac{4k^4\cos\psi\sin\psi}{\Delta\psi}\right. \\ y = \dfrac{k}{k'}\sqrt{c^2 - a^2}\left\{\dfrac{k^2(7-8k^2)\sin^2\psi + 4k^2 - 3}{\sin\psi\,\Delta\psi} - k'(8k^2-3)\right\} \\ z = o \end{cases}$$

Für die Gestalt der Kurve sind außer den Gl-en (50) folgende Ableitungen maßgebend:

[1]) A. Enneper, Ellipt. F. S. 208.

$$\frac{dx}{d\psi} = -\frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{\sin^2\psi} \cdot \frac{k'^2 - 3k^2\cos^2\psi}{\Delta^3\psi},$$

$$\frac{dy}{d\psi} = -\frac{k}{k'}\sqrt{c^2 - a^2} \cdot \frac{\cos\psi\,(3k'^2 - k^2\cos^2\psi)}{\sin^2\psi\,\Delta^3\psi}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k}{k'}\cos\psi \cdot \frac{3k'^2 - k^2\cos^2\psi}{k'^2 - 3k^2\cos^2\psi},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3k}{k'\sqrt{c^2 - a^2}} \cdot \frac{\sin^3\psi\,\Delta^7\psi}{(k'^2 - 3k^2\cos^2\psi)^3},$$

$$\frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{3k'^2}{k\sqrt{c^2 - a^2}}\,\mathrm{tg}^3\psi \cdot \frac{\Delta^7\psi}{(3k'^2 - k^2\cos^2\psi)^3}$$

Gültigkeitsbereich für ψ: $o \leqq \psi \leqq \pi$.

Der dem Intervall $\frac{\pi}{2} \leqq \psi \leqq \pi$ entsprechende Kurvenzweig ist wegen der Beziehungen:

$$(x)_{\pi-\psi} = -(x)_{\psi}, \quad (y)_{\pi-\psi} = (y)_{\psi}$$

zu dem Kurvenzweig, der dem Intervall $o \leqq \psi \leqq \frac{\pi}{2}$ entspricht, inbezug auf die y-Achse symmetrisch. Es genügt deshalb, wenn wir den letzteren Kurvenzweig betrachten.

Aus dem Werte des Differentialqaotienten $\frac{dy}{dx}$ folgt, daß hier drei Fälle zu unterscheiden sind:

1) $k'^2 > 3k^2$, d. h. $1 - 4k^2 > o$
2) $k'^2 < 3k^2$ aber $3k'^2 > k^2$, d. h. $1 - 4k^2 < o$ aber $3 - 4k^2 > o$.
3) $3k'^2 < k^2$, d. h. $3 - 4k^2 < o$.

1) $1 - 4k^2 > o$.

Durchläuft ψ das Intervall $\frac{\pi}{2} \geqq \psi \geqq o$ abnehmend, so bleiben $\frac{dx}{d\psi}$ und $\frac{dy}{d\psi}$ beständig negativ, $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ dagegen stets positiv; x wächst mit abnehmendem ψ von $x = o$ bis $x = \infty$

und y nimmt von $y = o$ bis $y = +\infty$ zu. $\frac{dy}{dx}$ strebt der Grenzlage $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\psi=o} = \frac{k}{k'} \cdot \frac{3-4k^2}{1-4k^2}$ zu. Im Punkte $\psi = o$ hat also der Kurvenzweig eine Asymptote, deren Gleichung lautet:

(52) $y = \frac{k}{k'} \cdot \frac{3-4k^2}{1-4k^2} x + \frac{k}{k'} \sqrt{c^2-a^2} \left\{ k'^2(8k^2-3) + (3-4k^2)(8k^2-1)E + (3-4k^2)K \right\}$

Die Kurve wendet der x Achse die konvexe Seite zu.

2) $1-4k^2 < o$, aber $3-4k^2 > o$.

In diesem Falle existiert ein Wert von ψ: $\psi = \psi_1$, für den $\cos^2 \psi_1 = \frac{k'^2}{3k^2}$ wird. Wir stellen leicht fest, daß x im Bereiche $\frac{\pi}{2} \geqq \psi \geqq \psi_1$ mit abnehmendem ψ wächst und zwar von $x = o$ bis zu seinem Maximum $x_{max} = (x)_{\psi_1}$; von hier an nimmt x mit abnehmendem ψ im Bereiche $\psi_1 > \psi \geqq o$ beständig ab bis $x = -\infty$; y wächst beständig mit abnehmendem ψ von $y = o$ bis $y = +\infty$. $\frac{dy}{dx}$ wächst mit abnehmendem ψ von $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\pi/2} = o$ bis $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\psi_1} = +\infty$; nimmt ψ weiter ab, so geht $\frac{dy}{dx}$ von $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\psi_1} = -\infty$ bis $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{o} = \frac{k}{k'} \cdot \frac{3-4k^2}{1-4k^2}$ Die Asymptote des Zweiges ist mithin wieder durch die Gl. (52) bestimmt. $\frac{d^2y}{dx^2}$ bleibt im Bereiche $\frac{\pi}{2} \geqq \psi \geqq \psi_1$ positiv, im Intervalle $\psi_1 > \psi \geqq o$ dagegen negativ. Die Kurve wendet der x-Achse zuerst die konvexe, hierauf die konkave Seite zu.

3) $3-4k^2 < o$.

Es gibt zwei Werte ψ_1 und ψ_2, die durch die Gleichungen

$$\cos^2 \psi_1 = \frac{k'^2}{3k^2}, \quad \cos^2 \psi_2 = \frac{3k'^2}{k^2}$$

bestimmt sind. Wir unterscheiden hier drei Bereiche:

1. Bereich: $\frac{\pi}{2} \geqq \psi \geqq \psi_1$; 2. Bereich: $\psi_1 > \psi \geqq \psi_2$;

3. Bereich: $\psi_2 > \psi \geqq 0$.

Aus dem für $\frac{dx}{d\psi}$ notierten Werte folgt, daß x im ersten Bereich mit abnehmendem ψ zunimmt und zwar von $x = 0$ bis zu seinem Maximum $x_{max} = (x)_{\psi_1}$, hierauf nimmt x beständig ab mit abnehmendem ψ bis $x = -\infty$. Der für $\frac{dy}{d\psi}$ auftretende Ausdruck zeigt, daß y in den ersten zwei Bereichen mit abnehmendem ψ wächst von $y_{min} = 0$ bis zu seinem Maximum $y_{max} = (y)_{\psi_2}$; hierauf nimmt y beständig ab mit sinkendem ψ im dritten Bereiche bis $y = -\infty$; $\frac{dy}{dx}$ ist zuerst positiv; sein Wert wächst von $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\psi=\frac{\pi}{2}} = 0$ bis $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\psi_1} = +\infty$; im zweiten Bereich ist sein Wert negativ und nimmt kontinuierlich zu von $\frac{dy}{dx} = -\infty$ bis $\frac{dy}{dx} = 0$; im 3. Bereiche wird $\frac{dy}{dx}$ wieder positiv und wächst bis zu dem Werte $\frac{dy}{dx} = \frac{k}{k'} \cdot \frac{3-4k^2}{1-4k^2}$. Die durch diese Richtung bestimmte Asymptote der Kurve hat wieder die Gl. (52). $\frac{d^2y}{dx^2}$ bleibt positiv im 1. und negativ in den übrigen Bereichen. Die Kurve ist zunächst konkav und dann konvex gegen die x-Achse

b) Parameterdarstellung der verbogenen Fläche.

Ähnlich wie im Falle $A = 1$, ergibt sich leicht:

$$\alpha = \frac{dx}{ds} = k' \cdot \frac{k'^2 - 3k^2\cos^2\psi}{\Delta^3\psi},$$

$$\beta = k\cos\psi \cdot \frac{3k'^2 - k^2\cos^2\psi}{\Delta^3\psi}, \quad \gamma = 0.$$

$$\lambda = 0, \ \mu = 0, \ \nu = 1, \ p = \frac{\sqrt{c^2 + a^2}}{k'} \cdot \frac{\Delta^2\psi}{\sin^2\psi},$$

$$q = k\sqrt{a^2 + c^2} \cdot \frac{1}{\sin\psi}.$$

Die Gleichungen der verbogenen Fläche (3) im § 1 lauten jetzt:

$$(53) \quad \begin{cases} x_1 = x + u\sqrt{c^2 + a^2} \cdot \dfrac{k'^2 - 3k^2\cos^2\psi}{\Delta\psi\sin^2\psi} \\ y_1 = y + u \cdot \dfrac{k}{k'}\sqrt{c^2 + a^2}\cos\psi \cdot \dfrac{3k'^2 - k^2\cos\psi^2}{\Delta\psi \cdot \sin^2\psi} \\ z_1 = u \cdot k\sqrt{c^2 + a^2} \cdot \dfrac{1}{\sin\psi}, \end{cases}$$

wo x und y durch die Gl-en (50) gegeben sind.

Gültigkeitsbereich für ψ: $0 \leqq \psi \leqq \pi$.

Die Darstellung der rechtwinkligen Koordinaten der verbogenen Direktrix und der Biegungslinienfläche wird immer unübersichtlicher, und die anzustellenden Diskussionen gestalten sich komplizierter mit wachsendem A. Da nun das Prinzipielle im ersten Teile bereits erledigt ist, so mögen die behandelten speziellen Fälle der Ausführung der Integrationen genügen.

Zum Schluß erlaube ich mir, meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. A. Gutzmer, für die freundliche Anregung zu diesen Untersuchungen und die liebenswürdige Förderung bei ihrer Ausführung meinen ergebensten Dank auszusprechen. Desgleichen möchte ich auch an dieser Stelle Herrn Prof. Dr. E. Salkowski herzlich für die gütige Unterstützung und für die wertvollen Ratschläge danken, die er mir in so hohem Maße hat zuteil werden lassen.

Ostdeutsche Druckerei und Verlagsanstalt Inh.: Otto Jung, Halle a. S., Barfüßerstr. 14.